MLS 차분법을 위한 Explicit 동적해석 알고리즘 개발

Development of Explicit Dynamic Algorithm for MLS Difference scheme

김 경 환* • 윤 영 철** • 이 상 호†
Kim, Kyeong-Hwan • Yoon, Young-Cheol • Lee, Sang-Ho

요 약

본 연구에서는 MLS 차분법을 이용하여 동역학 문제를 해석하기 위한 explicit 동적해석 알고리즘을 제시한다. 격자망이 없는 장점을 부각시키기 위해 이동최소제곱법에 근거한 Taylor 전개로부터 미분근사를 얻고 차분식을 구성했다. 지배 미분방정식의 시간항을 CDM(Central difference Method) 차분하여 빠른 속도로 동적해석을 수행하였다. 수치결과를 통해 본 연구에서 제시한 알고리즘의 정확성과 안정성을 확인할 수 있었다.

Keywords: MLS 차분법, explicit, 동적해석, 이동최소제곱법, 미분근사

1. 서 론

수치해석 분야의 연구가 발전해오면서 기존의 유한요소법에서 사용하는 요소망에 의한 제약을 벗어나기 위한 시도들이 행해지고 있다. 특히, 이동경계나 대변형이 발생하는 문제 등은 유한요소법을 이용하게 되면 매 단계마다 요소망을 재생성 해야 하는 등의 많은 불편이 따르기 때문에 그 시도들이 빈번하게 진행되고 있다. 1990년대 초반에 등장한 무요소법은 절점만을 이용하여 수치해석을 할 수 있기 때문에 요소망의 제약을 받지 않는 장점이 있다(Belytschko 등, 1994). 하지만 Galerkin 정식화에 의한 무요소법은 필수경계조건을 처리하는데 많은 문제점을 안고 있다. 그리고 유한요소법을 기본으로 하는 X-FEM(eXtended Finite Element Method)도 등장하였지만 수치적분이 필요하기 때문에 완전히 요소의 제약을 벗어났다고 보기 힘들다(Moes 등, 1999). 이러한 문제점들을 극복하기 위하여 절점만 사용하는 무요소법의 장점을 살리면서 경계처리나 수치적분의 부담을 버릴 수 있는 MLS 차분법이 제안되었다(윤영철 등, 2007).

MLS 차분법은 불연속 문제를 중심으로 정적문제에 활발히 적용되어 왔으며, 고체의 동적문제에 적용된 예가 없다. 본 연구는 동적문제의 해석에서도 MLS 차분법이 본래 갖고 있는 장점이 충분히 발휘될 수 있는 해석 알고리즘을 제시한다. 보통 무요소법을 근간으로 하는 동적해석기법들은 필수경계조건 처리의 난해함 때문에 약형식을 사용하는데, 이는 무요소법만의 장점을 살리지 못하게 할 뿐만 아니라 계산과정이 복잡해지는 어려움이 있다. 본 연구에서 제시하는 동적 알고리즘은 약형식의 도입 없이 강형식을 그대로 사용하기 때문에 고속으로 해석이 가능하여 기존의 방법들에 대한 차별성을 갖는다.

2. 동적 해석 알고리즘

* 학생회원 • 연세대학교 토목환경공학과 석사과정 kay@csem.yonsei.ac.kr
** 정회원 • 명지전문대학 토목과 조교수 ycyoon@mjc.ac.kr
† 정회원 • 연세대학교 토목환경공학과 교수 lee@yonsei.ac.kr

일반적으로 고체문제에서의 운동방정식(equation of motion)은 식 (1)과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho a_i \tag{1}$$

여기서 σ_{ij}는 응력텐서(stress), b는 체적력(body force), ρ는 밀도, a는 가속도를 나타낸다. 구성방정식(constitutive equation)과 적합방정식(compatibility equation)을 식 (1)에 적용시키고 체적력이 존재하지 않는다고 가정하면 Navier-Cauchy 방정식을 통하여 식 (2)와 같이 변위에 관한 식으로 정리할 수 있다.

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} = \rho a_i \tag{2}$$

식 (2)에서 가속도를 변위에 관한 식으로 정리하면 동적해석에 필요한 운동방정식이 얻어진다. 시간에 대한 적분은 explicit 방법과 implicit 방법으로 구분되는데, 본 연구에서는 계산속도가 빠른 explicit 방법에 초점을 맞춘다. CDM(Central Difference Method)을 식 (2)에 적용시키면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{\rho}\left[\mu u_{i,jj}^n + (\mu+\lambda) u_{j,ji}^n\right] + 2u_i^n - u_i^{n-1} \tag{3}$$

여기서 $\triangle t$는 시간 step을 나타낸다. 위 식을 경계조건에 관한 식과 함께 풀어주면 각 시간 step에서의 해를 얻을 수 있다. 우변의 전 시간 step에서의 해를 두 번 미분해야 하는 항은 이동최소제곱법 이용한 Taylor 전개로부터 쉽게 계산된다.

1차원의 경우, y를 기준으로 한 Taylor 급수로부터 m차 근사식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_L^m(x,y) &:= u(y) + \left(\frac{x-y}{\rho}\right)\frac{\rho}{1!}u^{(1)}(y) + \left(\frac{x-y}{\rho}\right)^2\frac{\rho^2}{2!}u^{(2)}(y) + \cdots + \left(\frac{x-y}{\rho}\right)^m\frac{\rho^m}{m!}u^{(m)}(y) \\ &= \boldsymbol{p}_m^T\left(\frac{x-y}{\rho}\right)\boldsymbol{a}(y) \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $\boldsymbol{a}(y)$의 성분은 $u(x)$의 y 위치에서의 미분값들을 포함한다. ρ는 이동최소제곱법 적용시 영향영역을 나타내는 가중함수의 반경이다. 미분계수 $u(y)$, $u^{(1)}(y)$, …는 이동최소제곱 잔차식으로부터 구한다. 1차원 문제의 경우, 다음과 같은 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$u^{n+1}(x) = 2u^n(x) - u^{n-1}(x) + \frac{\Delta t^2}{\rho}E u_{xx}^n(x) \quad \text{(1차원 문제)} \tag{5}$$

여기서 $u^{n+1}(x) = \sum \phi_I^{n+1}(x) u_I^{n+1}$로부터 계산된다. 식 (5)를 자연경계조건, 필수경계조건과 함께 Matrix 형태로 정리하면 전체 계방정식을 구성할 수 있다.

3. 수치 예제

3.1 FEM과 비교

Explicit MLS 차분법을 이용하여 그림 1과 같은 간단한 문제를 해석하고 FEM에 의한 해석결과와 비교하였다. 1차원 봉을 모형화하기 위해 21개의 절점을 사용했으며, ρ는 $\frac{0.28 lbf/in^3}{g} = 7.24 \times 10^{-4}$이고, E는 $30 \times 10^6 psi$를 사용했다. 그림 2에는 해석결과를 도시했다. 그림 2(a)와 2(b)는 MLS 차분법을 이용하여 얻은 변위와 속도에 대한 결과를 도시했고, 그림 2(c)와 2(d)에는 FEM을 이용한 해석한 결과를 나타냈다. 각 그래프에서 둥근 선은 예제의 정해를 나타낸다. 이와 같은 결과로부터 본 연구의 알고리즘이 FEM과 비교하여 정확하고 안정적인 결과를 주는 것을 확인할 수 있다.

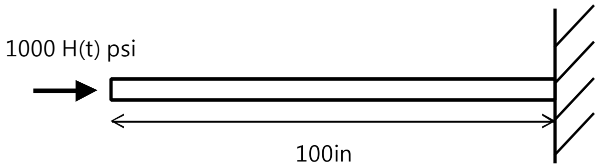
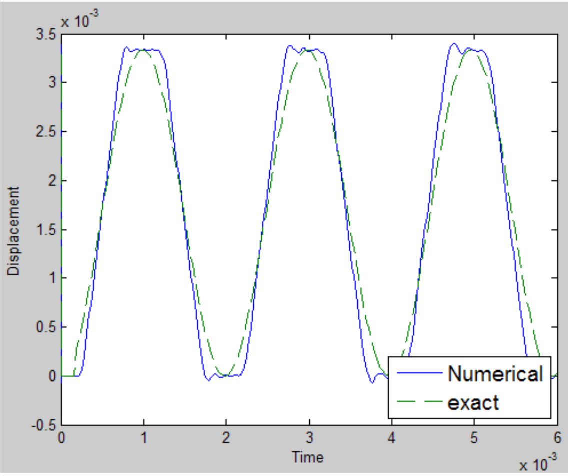
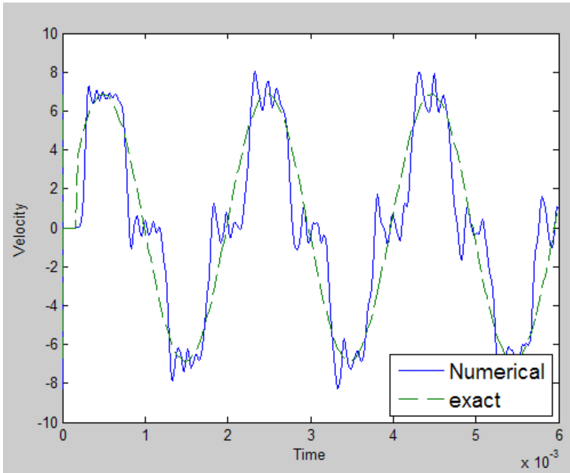


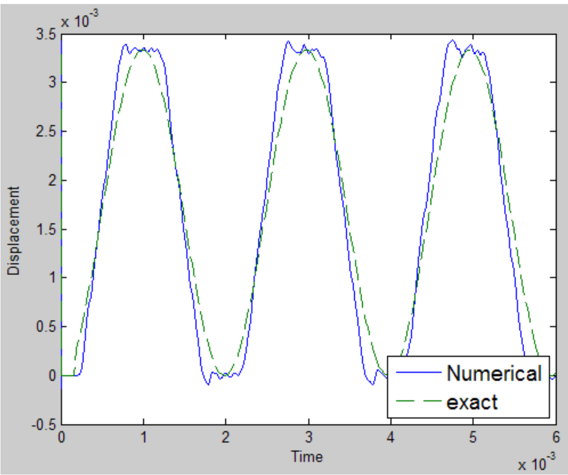
그림 1 1차원 Rod 문제



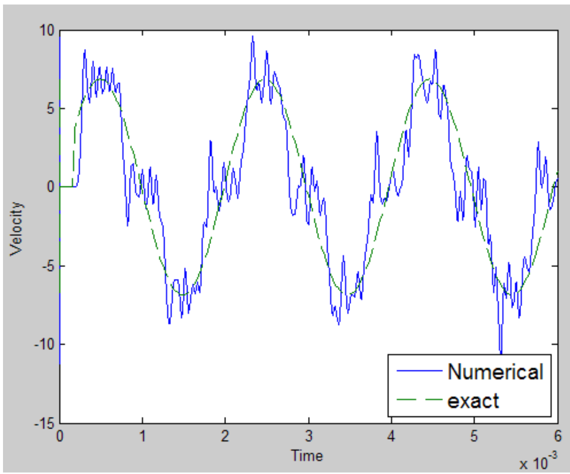
(a) MLS 차분법(CDM)에 의한 변위



(b) MLS 차분법(CDM)에 의한 속도



(c) FEM(CDM)에 의한 변위



(d) FEM(CDM)에 의한 속도

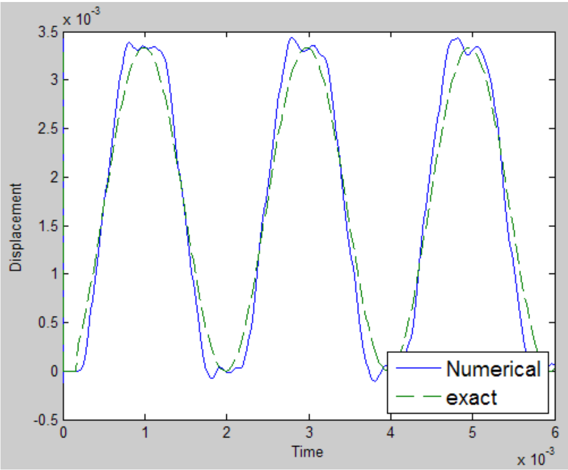
그림 2 1차원 Rod 문제(Explicit 해석 결과, FEM 결과와 비교)

3.2 Implicit와 비교

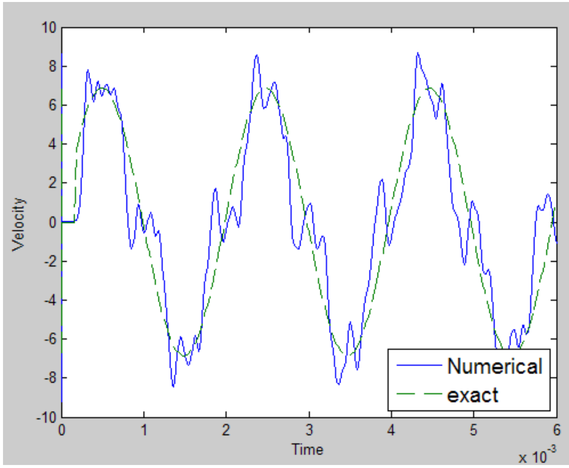
본 연구 방법을 implicit 해석결과와 비교하기 위해 TM(Trapezoidal Method)을 적용하여 얻은 해석결과를 그림 3으로 도시하였다. TM의 변위와 가속도의 관계식을 이용하여, 1차원 경우에 대한 동적 평형방정식을 적용하면 식 (6)과 같은 관계식을 얻는다.

$$\sum(\phi_I(x) - \frac{\triangle t^2 E}{4\rho}\phi_{I,xx}(x))u_I^{n+1} = \frac{\triangle t^2 E}{4\rho}\sum\phi_{I,xx}(x)(2u_I^n + u_I^{n-1}) + \sum\phi_I(x)(2u_I^n - u_I^{n-1}) \quad (6)$$

Explicit 법과 마찬가지로 식(6)을 경계조건식들과 함께 Matrix로 구성하면 전체 계방정식을 얻을 수 있다.



(a) MLS 차분법(TM)에 의한 변위



(b) MLS 차분법(TM)에 의한 속도

그림 3 1차원 beam 문제 Implicit 해석 결과

4. 결 론

본 연구에서는 MLS 차분법을 이용하여 고체의 동적거동을 해석하기 위해 explicit 알고리즘을 제시했다. 기존의 무요소법과 유한요소법의 단점을 보완하는 동시에 절점만 사용하여 강형식을 직접 이산화하는 장점은 그대로 유지했다. 결과적으로 유한차분법과 유사한 점이 상당히 있는 기법이 되었다. 1차원 봉에 대한 수치예제를 통해 FEM 뿐만 아니라 implicit 방법으로 계산한 결과와도 비교하여 본 연구에서 제안한 해석방법의 정확성과 안정성을 검증하였다. 그 결과, 절점만으로 이산화하고 적분과정 없이도 FEM 해석결과와 비교될 수 있는 매우 정확하고 안정적인 해석결과를 얻을 수 있었다. 앞으로 보다 심도 있는 추가 연구를 통해 다양한 동해석 분야에 확장이 필요하다.

감사의 글

본 연구는 2009년도 교육인적자원부 BK21 사업의 일환인 연세대학교 사회환경시스템공학부 미래사회기반시설 산학연공동사업단의 부분적인 지원을 받았음.

참고문헌

윤영철, 김동조, 이상호 (2007) 탄성균열해석을 위한 그리드 없는 유한차분법, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.321~327.

Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L. (1994) Element-free galerkin methods, *International Joural for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 229~256.

Moes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T. (1999) A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1), pp. 131~150.