

구조진동시스템의 적합직교분해에 관한 연구

A study on the proper orthogonal decomposition of the structural dynamic system

백 승 민* · 조 맹 효**

Baek, Sungmin · Cho, Maenghyo

요 약

적절한 근사화 과정을 통하여 구축된 축소 시스템은 전체 시스템의 거동을 적은 수의 정보를 통하여 효과적으로 표현할 수 있다. 효과적인 시스템 축소를 위하여 본 연구에서는 주파수 영역 Karhunen-Loeve (Frequency-domain Karhunen-Loeve, FDKL) 기법과 시스템 등가 확장 축소 과정(System equivalent expansion reduction process, SEREP)을 연동한 축소 기법을 제안한다. 적합직교분해(Proper orthogonal decomposition)의 한 방법인 FDKL기법을 통하여 최적모드(Optimal mode)를 구하고 이에 SEREP을 적용하여 자유도 변환 행렬을 구한다. 이때 주자유도 선정은 2단계 축소기법을 적용한다. 최종적으로 제안된 기법은 수치예제를 통하여 검증한다.

keywords : *eigenvalue problem, proper orthogonal decomposition, frequency-domain Karhunen-Loeve method, system equivalent expansion reduction process*

1. 서 론

대형 구조물의 동적 해석은 일반적으로 큰 규모의 전산자원과 계산시간을 필요로 한다. 지난 반세기 동안 발전한 유한요소법은 구조물의 해석에 정교한 해답을 제시해오고 있으나 전산기술과 효율적인 수치 알고리즘의 발전에도 불구하고 해석의 영역이 날로 대형화되고 있다. 이를 해결하기 위해 시스템 축소 기법이 연구되어오고 있다.

대형 구조물의 선형 진동 시스템에 있어 지배방정식은 식(1)과 같다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1)$$

전체 자유도 \mathbf{x} 가 $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_p$ 와 같이 소수의 주자유도 \mathbf{x}_p 로 표현이 된다면 이 때의 변환행렬에 의해 전체 지배방정식은 식(2)과 같이 축소가 될 수 있다.

$$\mathbf{M}_R \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_R \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{K}_R \mathbf{x}_p = \mathbf{f}_R \quad \text{where } \mathbf{M}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}, \mathbf{C}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T}, \mathbf{K}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}, \mathbf{f}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{f} \quad (2)$$

식(2)의 변환행렬 \mathbf{T} 를 구하는 방법에 따라 다양한 시스템 축소 기법에 제안되어 왔고(Noor 1994), 각 기법들은 서로 다른 수준의 효용성을 가지고 있다. 뿐만 아니라 유동해석에서도 시스템 축소 기법이 연구되어지고 있으며, 최근 K-L 기법과 시스템 등가 확장 축소 과정(System equivalent expansion reduction process)(O'callahan 1989)을 연계하여 정상상태 유동을 해석한 연구도 보고되었다(Sarkar *et al.* 2004).

* 학생회원 · 서울대학교 기계항공공학부 박사과정 thomas81@snu.ac.kr

** 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 교수 mhcho@snu.ac.kr

본 연구에서는 Kim(1998)에 의해 제안된 주파수 영역 K-L (Frequency-domain Karhunen-Loeve, FDKL) 방법과 시스템 등가 확장 축소 과정(System equivalent expansion reduction process, SEREP)을 사용하는 동적 진동 시스템의 축소 기법을 제안한다. 또한, 제안된 기법은 수치예제를 통하여 효율성을 검증한다.

2. 공식화

2.1. 주파수영역 K-L 방법

본 절에서는 KDFL방법을 간략하게 설명한다. 식(1)의 동적 시스템에서 주어진 주파수 응답 $U(\omega)$ 에서 최적 모드 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ 를 찾는 방법을 주파수 영역 K-L 방법을 통해서 수행한다. 이 기법은 주파수 영역에서 시스템의 응답과 모드 사이의 내적으로 표현되는 에너지를 최대화 하는 과정을 통해 구해진다.

$$\mathcal{J}(\phi) \equiv \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} (\phi, U)^2 d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\phi^T U|^2 d\omega \quad (3)$$

이때, 구속 조건은 다음과 같다.

$$h(\phi) \equiv (\phi, \phi) - \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \|U\|_2^2 d\omega = 0 \quad (4)$$

식(3)의 적분식을 M 개의 샘플 $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(M)}$ 를 샘플링 지점 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$ ($\omega_1 = -\Omega, \omega_M = \Omega$)를 바탕으로 적분식을 최대화하는 ϕ 구하고, 이를 snapshot 방법이라 한다.

$$\Delta\omega^{1/2} \mathbf{F} \Delta\omega^{1/2} \boldsymbol{\alpha}_i = \bar{\lambda}_i \boldsymbol{\alpha}_i \quad \text{where } F_{ij} \equiv U^{(i)*T} U^{(j)} \quad (M \times M) \text{ and } \Delta\omega^{1/2} \equiv \text{diag}(\sqrt{\Delta\omega_i}) \quad (M \times M) \quad (5)$$

여기서, $\Delta\omega_i$ 는 i 번째 지점에서의 스텝 크기를 의미한다. 식(5)의 고유벡터를 구하고 이를 통하여 선형 조합으로 구한 적합직교모드(Proper orthogonal mode, POM)는 다음 식(6)과 같다.

$$\phi_i \equiv [U^{(1)} U^{(2)} \dots U^{(M)}] \Delta\omega^{1/2} \boldsymbol{\alpha}_i \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (6)$$

최종적으로 전체 시스템 응답은 식(7)과 같이 제한된 개수의 모드의 선형 조합으로 나타낼 수 있다.

$$u(t) \simeq \sum_{i=1}^R \phi_i z_i(t) \quad (R \leq M) \quad (7)$$

이 때, 식(5)의 고유치는 $\bar{\lambda}_i = \mathcal{J}(\phi_i)$ 과 같은 관계를 가지고, 이는 각 K-L 모드가 시스템에 가지는 에너지의 총량을 의미하게 된다.

식(1)의 지배방정식을 주파수 영역으로 변환하면 식(8)와 같다. 이때, 비감쇠 시스템을 가정하고 하중은 impulse하중으로 가정하였다.

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] U(\omega) = F_j(\omega) \quad \text{where } F_j(\omega) = \left[\left| \frac{1}{j\omega - j\Omega_1} \right| \left| \frac{1}{j\omega - j\Omega_2} \right| \dots \left| \frac{1}{j\omega - j\Omega_N} \right| \right]^T \text{ and } j \equiv \sqrt{-1} \quad (8)$$

가진 주파수 Ω_k ($k=1, 2, \dots, N$)는 샘플링 범위 $(0, \Omega)$ 에서 임의로 선정을 하고, 식(8)의 선형 방정식을 통하여 각 샘플링 지점에서의 주파수 응답을 구할 수 있다.

2.2 시스템 등가 확장 축소 과정 (SEREP)

다음으로 식(7)에서 구한 POM에 O'Callahan(1989)제안한 SEREP기법을 적용하여 식(2)의 변환행렬 \mathbf{T} 를 구한다. 전체 변위 \mathbf{x} 는 주자유도와 부자유도로 나뉘며 이는 모드행렬 또한 식(9)과 같이 나누어짐을 의미하고 이때 \mathbf{z} 는 소수의 일반 좌표계(gerenalized coordinate)를 의미한다. 이 때 주자유도는 2단계 축소기법을 통하여 선정할 수 있다(백승민 2007).

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} \mathbf{z} = \phi \mathbf{z} \quad (9)$$

일반 좌표계는 $\mathbf{z} = \phi_p^+ \mathbf{x}_p$ 와 같은 관계를 통하여 주자유도로 표현될 수 있고 이때 관계식 ϕ_p^+ 는 식(10)과 같이 역행렬(pseudo-inverse)의 형태로 나타낼 수 있다. 이때, R 은 모드개수, P 는 주자유도의 개수를 의미한다.

$$\phi_p^+ = \begin{cases} [\phi_p^T \phi_p]^{-1} \phi_p^T, R > P \\ \phi_p^T [\phi_p \phi_p^T]^{-1}, R < P \end{cases} \quad (10)$$

최종적으로 자유도 변환 관계식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} \phi_p^+ \quad (11)$$

이를 통하여 전체 지배방정식은 식(2)의 과정으로 축소한다.

3. 수치 예제

앞서 제안된 기법의 효용성을 그림 1에서와 같은 외팔관 예제를 통하여 검증하도록 한다. 전체 64개의 4절점 쉘 요소(Aminporu 1988)를 사용하였고, 절점 개수는 85개, 전체 자유도는 430개 이다. 경계조건은 한번을 고정단으로 하였다. 그림 1에서의 붉은 색원은 주자유도의 위치를 나타내며, 총 18개의 자유도를 주자유도로 선정하여 축소 시스템은 전체의 4.2%로 축소되었다.

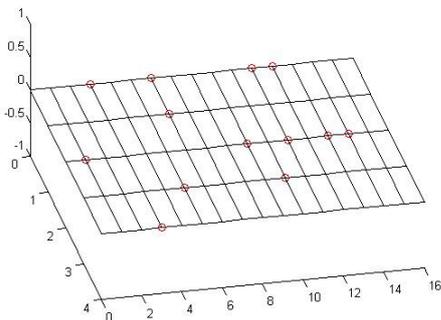


그림 1. 외팔관 예제의 유한요소 모델링

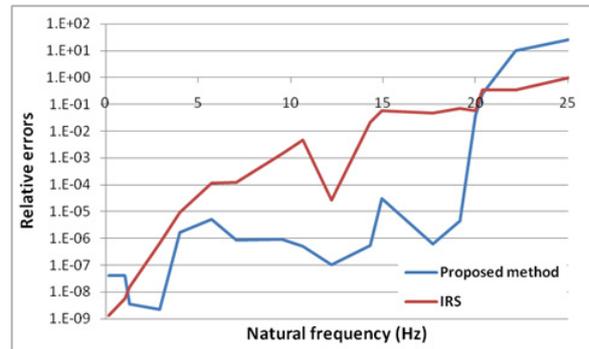


그림 2. 고유 주파수 상대 오차

시스템의 응답은 10^{-4} Hz에서 20Hz 사이의 주파수대역에서 샘플링을 하였고, 주파수 간격은 0.1Hz로 하여 총 400 지점에서 응답을 구하였다. 이를 통해 총 18개의 POM을 구하였고, 에너지항 $\bar{\lambda}_i$ 은 10^{-4} 이상의 값만 취하였다. 이 모드를 통하여 식(11)의 변환행렬을 구축하여 전체 시스템을 축소하여 고유치 해석을 수행하였다. 이 때 하중 조건은 주파수 샘플링과 동일한 주파수 대역에서 임의의 가진 주파수의 충격하중을 선정하였고, 전체 시스템에 고루 분포하도록 하중 조건을 가정하였다.

고유치 해석 결과를 통하여 전체 시스템 결과와의 상대오차를 구한 결과는 그림 2와 같다. 이때 고유치 오차는 식(12)과 같이 구하였다.

$$error = \frac{|f_{reduced} - f_{full}|}{f_{full}} \quad (12)$$

제안된 기법과 IRS기법을 통하여 시스템 축소(백승민 2007)한 결과와의 비교를 통하여 효용성을 검증하였다. 기존의 기법이 고유모드의 차수가 높아질수록 오차가 커짐에 반해 제안된 기법은 정해진 주파수 대역

(20Hz) 내에서는 신뢰할 만한 결과를 나타내는 것을 알 수 있다. 전체적인 오차의 량 또한 기존의 방법에 비해 매우 낮은 수준 -10^{-5} 이하임을 확인 할 수 있다. 이에 반해 지정된 주파수 대역 외의 영역에서는 오차가 커짐을 알 수 있어서 해석이 대상이 거동하는 주파수 대역에 대한 적절한 선형적 가정이 필요하다.

4. 결 론

본 연구에서 주파수 영역 K-L기법과 SEREP 기법을 연동한 시스템 축소 기법을 제안한다. 이때 자유도 선정은 2단계 축소기법을 통하여 구하였다. 제안된 기법을 통하여 자유도 기반의 축소를 주파수 영역 K-L 모드로 할 수 있고, 기존의 시스템 축소 기법에 비해 하중의 영향력을 축소 과정에 근사화할 수 있었다. 제안된 기법을 외팔관 예제를 통하여 효용성을 검증하였다. 현재, 제안된 기법을 부분구조합성법(Component mode synthesis)(Kim 2002)에 적용하는 연구가 진행 중에 있다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단이 주관하는 ‘국가지정연구실 사업 (No. R0A-2008-000-20109-0)’의 연구비 지원을 받아 수행되었습니다.

참고문헌

- 백승민, 김기욱, 조맹효 (2007) 동적 해석의 효율적 축소기법에 관한 연구, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp. 347-352
- Aminpour, M.A., (1992) An assumed-stress hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 33, pp.19-38
- Kim, T. (1998) Frequency-Domain Kathunen-Loeve Method and Its Application to Linear Dynamic Systems, *AIAA Journal*, 36(11), pp.2117~2123
- Kim, T. (2002) COMPONENT MODE SYHTHESIS METHOD BASED ON OPTIMAL MODAL ANALYSIS, *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Confernece*, AIAA2002-1226, Denver, Colorado.
- Noor, A.K. (1994) Recent advances and application of reduction methods, *Appl. Mech. Rev., Trans. ASME*, 47(5), pp.125-146.
- O'callahan, J. (1989) System equivalent reduction and expansion process, *Proceedings of the 7th International Modal analysis conference*, Society of Experimental Mechanics, pp. 29-37.
- Sarkar, S., Venkatraman K. (2004) Model order reduction of unsteady flow past oscillating airfoil cascades, *journal of Fluids and Structures*, 19, pp.239~247