

# 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율화를 위한 적응성 영역/경계 분할 기법

## Adaptive Domain/Boundary Decomposition Method for Computational Efficiency of Thermo-Elasto-Viscoplastic Damage and Contact Analysis

김성준\* · 김종일\*\* · 신의섭\*\*\*

Kim, Sung Jun · Kim, Jong-Il · Shin, Eui Sup

### 요약

본 논문에서는 열탄점소성 손상과 접촉 문제의 효율적인 해석을 위하여 적응성 영역/경계 분할법을 제안하였다. 적응성 영역/경계 분할법은 시간 증분 또는 반복 기법 단계에서 열탄점소성 손상과 같은 재료 비선형성을 감안하여 부영역을 재설정하며, 접촉에 따른 경계 비선형성은 경계면을 통하여 부영역으로부터 독립적으로 분할한다. 분할된 각각의 부영역과 경계면을 기준으로 유한요소 정식화를 수행하며, 공유면 및 접촉 공유면의 연속 구속 조건을 처리하기 위하여 벌칙 함수 기법을 적용하였다. 결과적으로 재료 및 경계 비선형성은 일부 부영역과 접촉 경계면에서 계산되는 유한요소 행렬에 국한된다. 수치 실험을 통하여 적응성 해석 알고리즘의 기본적인 특성과 효율성 향상에 대하여 분석하였다.

**keywords** : 영역/경계 분할, 적응성, 열탄점소성, 손상, 접촉

### 1. 서론

소성과 접촉과 같은 재료 및 경계 비선형성은 풍력 블레이드 체결 부위 등의 구조 강성을 저하시킬 수 있으며, 국부적으로 진전된 손상은 전체 구조물의 안전성과 성능에 영향을 미친다. 더욱이 구조물의 성능에 대한 기대와 임무가 복잡해짐에 따라서 복잡한 형상에 대한 모델링 문제, 매우 큰 자유도에 따른 계산 시간 증가 등의 어려움이 수반된다. 특히, 재료 및 경계 비선형성은 거동에 있어서 국부적인 영역과 경계 일부에서만 발생함으로 전체 영역을 기준으로 해석을 수행한다면, 매우 큰 자유도를 갖는 복잡한 구조물에 대해서 효율적인 해석 환경을 제공할 수 없다. 이러한 점을 고려할 때 비선형성을 일부 부영역 및 경계에 분할한 후, 독립적으로 해석하는 영역/경계 분할법은 해석의 효율성을 높이는 유용한 방법이다(Pantano와 Averill, 2007). 하지만 열탄점소성 손상에 따른 재료 비선형성은 극히 일부 영역에서 발생되어 진전됨으로 초기 분할된 부영역을 기준으로 해석을 수행하는 기법은 효율적인 측면에서 미흡하다(김성준과 신의섭, 2009). 비선형 재료 거동 특성에 착안하여 적절히 영역을 분할한다면 전체 해석의 효율성을 크게 증가시킬 수 있다.

본 논문에서는 열탄점소성 손상 및 접촉 문제의 효율적인 해석을 위하여 적응성 영역/경계 분할법을 적용하였다. 수치 실험을 통하여 제안된 기법의 효율성 향상에 대하여 분석하였다.

\* 정회원 · 전북대학교 항공우주공학과 박사과정 diskgo@jbnu.ac.kr

\*\* 정회원 · 전북대학교 항공우주공학과 박사과정 jikim@jbnu.ac.kr

\*\*\* 정회원 · 전북대학교 항공우주공학과 부교수 esshin@jbnu.ac.kr

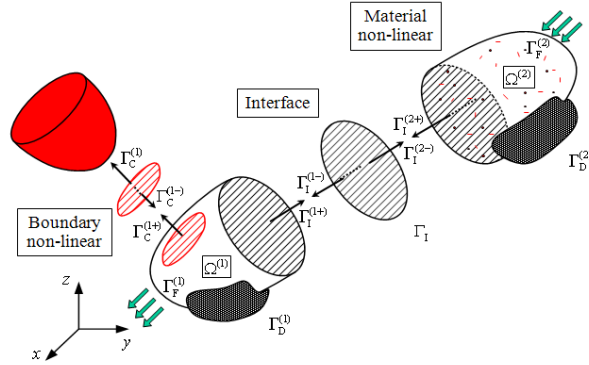


그림 1 Linear subdomain  $\Omega^{(1)}$ ; non-linear subdomain  $\Omega^{(2)}$ ; interface  $\Gamma_1$ ; and contact interface  $\Gamma_C^{(1-)}$

## 2. 적응성 영역/경계 분할법 및 해석 기법

전체 영역을 그림 1과 같이 열탄점소성 손상 거동을 하는 비선형 부영역과 접촉에 따른 비선형 공유면을 독립적으로 분할한다. 분할된 접촉 공유면과 경계면의 연속 조건과 구속 조건은 벌칙 함수법을 적용한다. 시험 함수(test function)로 가상 변위를 도입하면 지배방정식의 약형(weak form)을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{N_S + \tilde{N}_S} \delta \Pi_D^{(k)} + \delta \Pi_{DI} + \sum_{k=1}^{N_S + \tilde{N}_S} \delta \Pi_C^{(k)} = 0 \quad (1)$$

$$\delta \Pi_D^{(k)} = \int_{\Omega^{(k)}} \rho \dot{u}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV + \int_{\Omega^{(k)}} \sigma_{ij}^{(k)} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} dV - \int_{\Omega^{(k)}} \bar{f}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV - \int_{\Gamma_i^{(k)}} \bar{T}_{Fi}^{(k)} \delta u_i^{(k)} dS + \dots \quad (2)$$

$$\delta \Pi_{DI} = \sum_{k=1}^{N_S + \tilde{N}_S} \varepsilon_{DI}^{(k-1)} \int_{\Gamma_1^{(k-)}} (v_i - u_i^{(k)}) \delta v_i dS \quad (3)$$

$$\delta \Pi_C^{(k)} = \varepsilon_{DC}^{(k-1)} \int_{\Gamma_C^{(k-)}} (w_i^{(k)} - u_i^{(k)}) \delta w_i^{(k)} dS + \varepsilon_C^{(k-1)} \int_{\Gamma_C^{(k)}} (w_j^{(k)} n_j^{(k)} - s^{(k)})^+ n_i^{(k)} \delta w_i^{(k)} dS \quad (4)$$

열탄점소성 손상 모델로서 N형 재료 이론에 근거하여 자유 에너지  $\phi$ 와 소산 퍼텐셜  $\psi$ 로부터 유도된 구성 방정식을 사용하였다(Chung et al., 2002).

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}^{(k)}} = (1 - d^{(k)}) C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^{(k)} - \varepsilon_{kl}^{p(k)} - \alpha_{kl} \theta_+^{(k)}) \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p(k)} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\sigma}_{ij}^{(k)}} = \frac{D_0}{2h^{(k)} \sqrt{\hat{J}_2^{(k)}}} \exp\left(-\frac{2h^{(k)2}}{3\hat{J}_2^{(k)}}\right) \hat{\sigma}_{ij}^{(k)} \quad (6)$$

여기서  $C_{ijkl}$ 는 초기 탄성 계수,  $D_0$ 은 재료 상수,  $h$ 는 내부 상태 변수에 대응하는 열역학적 공액력이다. 유도된 변분 형태의 약형을 공간과 시간에 대하여 이산화하면, 다음과 같은 변위장의 블록 행렬 형태의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_D^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{P}_{DI2}^{(1)} & -\mathbf{P}_{DC2}^{(1)} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{K}}_D^{(N_S+1)} & \dots & -\mathbf{P}_{DI2}^{(N_S+1)} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{P}_{DC2}^{(N_S+1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \mathbf{K}_{DI} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \text{sym.} & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \mathbf{K}_{DC}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \mathbf{K}_{DC}^{(N_S+1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(N_S+1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{v} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{w}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{w}^{(N_S+1)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(N_S+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(N_S+1)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7)$$

표 1 FLOPs results for solution algorithms, noDBD and  $w-v-u+\psi-\phi-\theta$

Sol. Algorithm	Domain/Boundary (Range $k$ )		FLOPs: Decomposition	FLOPs: Substitution
noDBD	$\Omega$	-	$N_{TS}^* + \alpha \times f_3(D_u, B_u)$	$N_{IT} \times f_4(D_u, B_u)$
$w-v-u$	$\Omega^{(k)}$	$1, \dots, N_S$	$1 \times f_3(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$	$D_v^{(k)} + D_w^{(k)} + N_{IT} \times f_4(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$
	$\Omega^{(k)}$	$N_S + 1, \dots, N_S + \tilde{N}_S$	$N_{TS}^* \times f_3(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$	$N_{TS}^* \times (D_v^{(k)} + D_w^{(k)}) + N_{IT} \times f_4(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$
	$\Gamma_1$	-	$N_{TS}^* \times f_1(D_v)$	$N_{TS}^* \times D_w + N_{IT} \times f_2(D_v)$
	$\Gamma_C$	-	$N_{TS}^* + \alpha \times f_1(D_w)$	$N_{IT} \times f_2(D_w)$
noDBD	$\Omega$	-	$1 + \beta \times f_3(D_\phi, B_\phi)$	$N_{IT} \times f_4(D_\phi, B_\phi)$
$\psi-\phi-\theta$	$\Omega^{(k)}$	$1, \dots, N_S$	$1 \times f_3(D_\phi^{(k)}, B_\phi^{(k)})$	$D_\psi^{(k)} + D_\psi^{(k)} + N_{TS} \times f_4(D_\phi^{(k)}, B_\phi^{(k)})$
	$\Omega^{(k)}$	$N_S + 1, \dots, N_S + \tilde{N}_S$	$1 \times f_3(D_\phi^{(k)}, B_\phi^{(k)})$	$D_\psi^{(k)} + D_\psi^{(k)} + N_{IT} \times f_4(D_\phi^{(k)}, B_\phi^{(k)})$
	$\Gamma_1$	-	$1 \times f_1(D_\psi)$	$D_\psi + N_{IT} \times f_2(D_\psi)$
	$\Gamma_C$	-	$1 + \beta \times f_1(D_\psi)$	$N_{IT} \times f_2(D_\psi)$

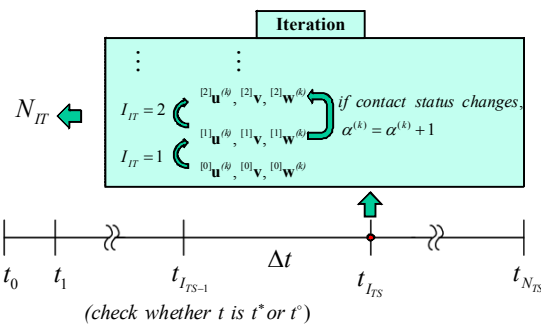


그림 2 Notation for time steps and iterations

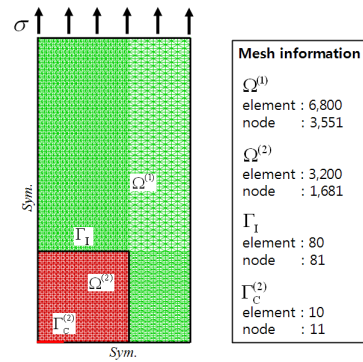


그림 3 Finite element model

여기서  $\mathbf{K}_D, \mathbf{K}_{DI}, \mathbf{K}_{DC}$ 는 강성행렬이며,  $\sim$ 는 비선형 행렬, 왼쪽 위 첨자인  $t, t + \Delta t$ 는 시각을 의미한다.  $\mathbf{P}$ 와  $\mathbf{p}$ 는 각종 벌칙함수에서 기인하는 행렬이다. 온도장에 대해서도 비슷한 과정을 거치면 블록 행렬 형태의 방정식을 얻을 수 있으며, 지면 제약으로 인하여 유도 과정과 행렬 표기는 생략하였다. 모든 행렬의 조립과 계산 과정을 부영역, 공유면, 접촉 공유면을 기본 단위로 하는 병렬화된 알고리즘으로 처리하기 위하여, 공유면과 접촉 공유면의 변위 연속 조건을 벌칙함수로 처리하였다. 따라서 구하는 미지수(변위와 온도) 순서를 기준으로 네 종류의 해석 알고리즘  $w-v-u+\psi-\phi-\theta, v-w-u+\phi-\psi-\theta, w-u+\psi-\theta, v-u+\phi-\theta$ 로 구성할 수 있다. 비선형 부영역  $\Omega^{(k)}(k=N_S+1, \dots, N_S+\tilde{N}_S)$ 에서의 유효 강성 행렬과 하중 벡터는 손상 진전에 따라서 재계산을 하며, 진전되는 손상을 기준으로 시간 증분 단계에서는 적응성 알고리즘에 의하여 부영역과 공유면을 재설정한다.

시간 증분 단계에서 연산 반복 횟수에 영향을 미치는 주요 인자를 그림 2에 도시하였다.  $N_{TS}$ 는 총 시간 증분 횟수,  $N_{IT}$ 는 총 반복 계산 횟수이다. 최종적으로 계산의 효율성을 측정하기 위해 해석 알고리즘  $w-v-u+\psi-\phi-\theta$ 에 소요되는 연산 횟수 FLOPs(Floating-Point OPERations)를 표 1에 정리하였다. 여기서 noDBD은 영역/경계 분할법을 적용하지 않은 경우이다. Gauss 소거법에 의한 전체 행렬의 삼각 분해 단계  $f_1(D)$ 와 대입 단계  $f_2(D)$ , 대역 행렬에 대한 삼각 분해 단계  $f_3(D, B)$ 와 대입 단계  $f_4(D, B)$ 로 구분된다. 여기서  $D$ 는 총 자유도,  $B$ 는 대역폭의 크기이다.  $N_{TS}^*$ 는 손상 진전에 따른 재계산 횟수,  $\alpha$ 는 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 횟수,  $\beta$ 는 접촉 지속 횟수이다.

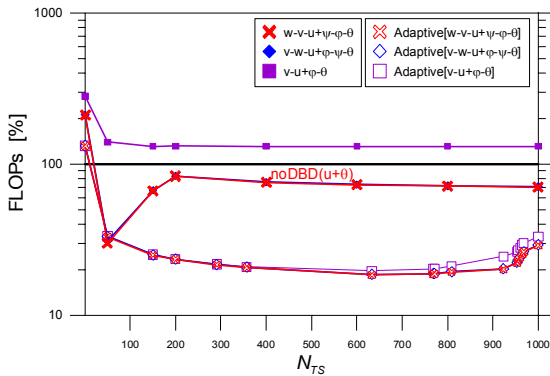


그림 4 FLOPs vs. time step

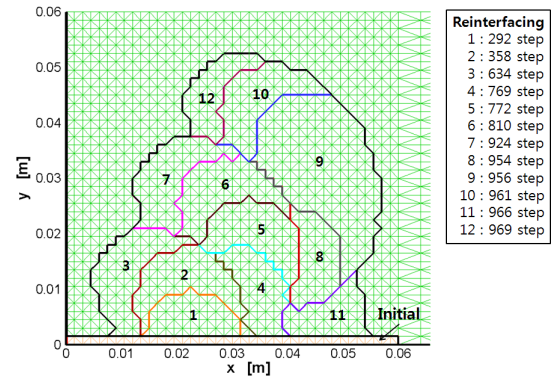


그림 5 Reinterfacing steps according to damage

### 3. 수치 실험 및 고찰

적응성 영역/경계 분할법을 적용한 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율성을 고찰하기 위하여, 그림 3의 균열을 갖는 직사각형 평판 모델을 수치 실험을 통하여 분석하였다. 사용된 재료는 알루미늄 2024이며, 하중 조건으로  $\sigma(t) = \sigma_M \sin 2\pi t / T_C$  ( $\sigma_M = 158 \text{ MPa}$ ,  $T_C = 200 \text{ s}$ )가 균일하게 분포되어 있다. 그림 4는 시간 증분 횟수의 변화  $N_{TS}$ 에 따른 FLOPs 결과이다. 적응성 영역/경계 분할법의 효율성을 확인하기 위하여 적응성 기법을 적용하지 않은 결과와 함께 비교하였다. 적응성(Adaptive) 알고리즘  $w-v-u+\psi-\phi-\theta$ 의 경우 총 계산량이 noDBD의 소요 계산량의 29.05% 수준까지 감소하였다. 이는 70.48%의 효율성 향상을 나타내는 이전의 영역/경계 분할법과 비교하면 최대 1.4배 효율성이 향상되는 것을 의미한다. 그림 5에서는 적응성 알고리즘에 따라 비선형 반복 계산을 수행하는 부영역의 크기가 점차 확장되는 과정을 확인할 수 있다.

### 4. 결론

본 논문에서는 적응성 영역/경계 분할법을 적용한 유한요소 정식화 기법을 통하여 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율성 향상을 분석하였다. 적응성 영역/경계 분할을 적용함으로써 열탄점소성 손상 및 접촉과 같은 국부적인 비선형성을 손상의 진전에 따라 일부 부영역 및 공유면에 할당할 수 있다. 다양한 알고리즘을 분석한 결과 계산량이 최대 29.05%~33.16%까지 감소됨을 확인하였다.

### 감사의 글

본 논문은 부분적으로 호남 광역경제권 선도산업 육성사업의 연구비 지원으로 수행된 연구 결과입니다.

### 참고문헌

- 김성준, 신의섭 (2009) 영역/경계 분할에 의한 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율화, **한국전산구조공학회 논문집**, 22(2), pp.153-166.
- Pantano, A., Averill, R.C. (2007) A penalty-based interface technology for coupling independently modeled 3D finite element meshes, *Finite Elements in Analysis and Design*, 43, pp.271-286.
- Chung, S.W., Kim, S.J., Kim, J.H. (2002) Finite element simulation of metal forming and in-plane crack propagation using ductile continuum damage model, *Computers & Structures*, 80(23), pp.1771-1788.