FETI를 이용한 비압축 비투과성 다공질 매체의 혼합유한요소해석

The Mixed Finite Element Analysis for Nearly Incompressible and Impermeable Porous Media Using FETI

이 경 재* • 탁 문 호** • 박 대 효***

Lee, Kyungjae • Tak, Moonho • Taehyo Park

요 약

일반적인 포화된 다공질 매체의 수치해석에서는 거시적 관점의 고체변형과 유체이동을 동시에 고려한 혼합유한요소방법(Mixed Finite Element Method)이 쓰인다. 그러나 고체변형이 거의 없는 상태에서 유체가 이동할 경우, 또는 고체변형과 유체유동이 거의 없고 외력에 의한 간극압만 존재할 경우 이를 혼합유한요소방법으로 해석하기에는 요소 잠김(Element Locking)현상 때문에 매우 불안정하다. 본 논문에서 Park과 Tak(2010)이 제안한 비압축성, 비투과성 포화 다공질 매체의 해석기법인 Staggered Method를 소개하고 수치적 효율성을 높이기 위해 요소분할기술 중 하나인 FETI(Finite Element Tearing and Interconnecting) 기법의 접목을 제안하고자 한다.

keywords : 다공질 매체, staggered method, domain decomposition, FETI method

1. 서 론

다공질 매체의 이론식은 1941년 Biot에 의해 처음 소개되어졌다. 그는 앞서 연구된 Terzaghi(1931)의 지반압밀이론을 연속체 역학적 개념을 도입한 Poroelasticity 이론을 통하여 3차원 지배방정식을 제안하였다.

지배방정식을 이용한 수치해석 모델은 고체와 유체의 거동을 동시에 고려해야 하는 이유로 하이브리드 요소를 사용한 유한요소방법이 많이 연구되어져 왔다. Zienkiewicz 등(1980)은 지배방정식을 변위, 간극수압으로 표현되는 u/p 모델을 정식화 하였으며 혼합유한요소해석을 이용하여 지반에 압밀해석을 수행한 바 있다. 그 후 Borja(1986), Voyiadjis와 Abu-Farsakh(1997)등에 의해 혼합유한요소해석은 그 범위가 지반역학분야에서 고체역학분야로 확장되었다.

그러나 이러한 혼합유한요소 해석방법에는 선형방정식을 해석함에 있어서 직접법(Direct Method 또는 Monolithic)사용이 매우 제약적이다. 왜냐하면 고체영역과 액체영역의 형상함수 차수가 다르므로 요소사이의 연속성문제가 발생하기 때문이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 혼합유한요소해석에서는 방정식에서 요구되는 차수에 맞는 하이브리드 요소를 사용하였으나 차수가 다른 요소를 사용함에 있어서 수치해석상 효율성과 정확성에 대한 문제를 발생시킨다. 다공질 매체 내에서 고체가 비 압축이고 유체의 흐름이 매우 느리다고 가

* 제 1저자, 학생회원 • 한양대학교 건설환경공학과 석사과정 htriplehh@hanyang.ac.kr

** 공동저자, 학생회원 • 한양대학교 건설환경공학과 박사과정 pivotman@hanyang.ac.kr

*** 교신저자, 정회원 • 한양대학교 건설환경공학과 교수 cepark@hanyang.ac.kr

정한다면 해석진행에 있어서 요소잠김현상이 발생하며 하이브리드 요소 차수의 선택폭이 좁아진다. 이러한 문제점의 해결을 위해서는 요소가 Patch Test를 통과 하거나 Baduska-Brezzi 조건이 만족되어야 한다. 또 다른 해결은 모델의 동적해석에서 직접법이 아닌 스태커드 방법을 사용하는 것이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 Park and Tak(2010)은 비압축, 비투과성 포화 다공질 매체 해석기법인 스태커드 방법을 개발하였다. 그러나 스태커드 방법은 동일차수요소를 사용할 경우 수치적 불안정성이 해결되었지만 수치적인 효율성에 있어서 문제점이 발생한다.

따라서 본 논문에서는 Park and Tak(2010)이 제안한 비압축, 비투과성 포화 다공질 매체 해석 기법을 소개하고 수치적 효율성을 위해 요소 분할 기술 중 하나인 FETI기법의 접목방법이 되어진다.

C. Farhat(1991)에 의해 처음 소개된 FETI 기법은 병렬 해석을 하기 위한 효과적인 도메인 분할 방법이다. 주어지는 공간상의 도메인은 겹쳐지지 않는 여러 개의 하위 도메인으로 나누어지고 기본적인 하위 도메인의 해석은 direct method가 사용된다. 하위 도메인끼리의 연속성은 하위 도메인 사이에 Lagrange Multipliers가 적용됨으로써 해석된다. 현재까지 Lagrange Multiplier를 풀기 위한 가장 효과적인 방법은 PCG(Preconditioned Conjugate Gradient) 알고리즘이다. 본 연구에서는 스태커트 방법과 FETI 기법의 접목을 통하여 비압축, 비투과성 다공질 매체의 수치적 효율성이 검토되어 진다.

2. 스태커드 방법(Staggered method)

일반적인 포화된 다공질 매체의 수치해석에서는 거시적 관점의 고체변형과 유체이동을 동시에 고려한 혼합유한요소방법(Mixed Finite Element Method)이 쓰인다. 수치적 안정성을 위해 같은 차수에서의 비압축성, 불투수성의 문제에서는 time step 알고리즘과 요소의 호환성이 우선적으로 고려된다. 하지만 고체와 액체의 형상함수가 같은 차수라면 연속성이 만족되지 않는다. 혼합된 유한요소해석에서는 고체와 액체로 구성된 높은 차수의 다공질 매체의 형상함수가 연속조건을 만족해야 한다. 그리고 요소의 차수는 Baduska-Brezzi 조건(1973, 1974)이나 Patch Test를 만족해야만 한다. 하지만 비압축성이고 비투과성인 다공질 매체에서 변위와 간극수압은 자주 변하기 때문에 안정된 수렴 값을 찾기는 어려운 일이다. 따라서 Park 과 Tak(2010)은 이러한 문제점을 해결하기 위해 스태커드 방법(Staggered Method)를 제안하였다.

일반적으로 큰 규모의 모델이나 다양한 크기의 매쉬 모델의 효과적인 해석을 위해 사용되는 Multi Time Step 방법을 다공질 매체의 해석에 적용시켜 스태커드 방법에 대입하면 아래의 식(1), (2)와 같다.

$$\widetilde{u^s_{n+1}}(t_1) = K^{-1}_{T,n+1}\left\{f^s_{n+1} + C_{1,n+1}\widetilde{p^s_{n+1}}(t_2)\right\} \tag{1}$$

$$\widetilde{p^f_{n+1}}(t_2) = \left[D_{n+1} + \frac{1}{\Delta t_{2,n+1}}S_{n+1}\right]^{-1} \left\{f^f_{n+1} + \frac{1}{\Delta t_{2,n+1}}S_{n+1}\widetilde{p^f_n}(t_2) + \frac{1}{\Delta t_{1,n+1}}\left(C_{2,n+1}\left(\widetilde{u^s_n}(t_1) - \widetilde{n^s_{n+1}}(t_1)\right)\right)\right\} \tag{2}$$

여기서, u_s는 변위, p^f는 간극수압, K_T는 Tangential stiffness matrix, D는 drainable matrix, S는 compressible matrix, C는 constitutive matrix를 나타낸다.

하지만 위 방정식은 수치적으로 안정적 이지만 다중 시간의 통합 과정으로 인한 결과 값의 적용은 어려워진다. 이와 같은 문제 해결을 위해 Remeshing 방법과 Sub-Iteration 방법이 제안되었다.

Remeshing 방법은 매쉬의 조절을 위하여 임의의 값을 가진 간극수압을 가정한다. 매쉬의 조절은 식(1), (2)에서 반복하여 적절하지 않은 평형상태에서의 안정된 값을 찾는 역할을 하게 된다. 다시 말하면 변형된

매쉬는 초기위치나 전 단계 에서 재배열이 되고 간극 수압은 매 시간마다 임의의 벡터 값으로 가정 된다. 이러한 가정은 압축성, 투수성 문제 또한 적용가능하고 다양한 Remeshing 방법을 통하여 효과적인 수치를 얻을 수 있다.

Remeshing 방법을 통한 임의의 매쉬가 변형된 후 식(1), (2)는 Multi Time Step 방법에 의해 다시 평형상태가 된다. 임의의 매쉬 좌표를 χ라고 가정하면 remesh된 변위는 형상함수를 이용하여 정의 할 수 있다. 공간상의 변위는 식(3)과 같다.

$$\widetilde{u^{s}_{n+1}}(x,t_1) = \widetilde{u^{s}_{n+1}}(x,t_1) + \widetilde{n^{r}_{n+i}}(\chi,t_1) \tag{3}$$

여기서 아래첨자 i는 Sub-Iteration의 횟수로 정의 된다.

가정한 임의의 좌표 χ는 공간좌표 x와 같고 평형조건을 만족하기위해 remesh된 변위는 전 단계 변위와 전전 단계의 변위를 사용하며 이를 이용해 Sub-Iteration을 표현하면 식(4)와 같이 나타내어진다.

$$\widetilde{p^{f}_{n+(i+2)}}(t_2) = \left[D_{n+(i+2)} + \frac{1}{\Delta t_{2,n+(i+2)}} S_{n+(i+2)} \right]^{-1} \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{f}_{n+(i+2)} + \dfrac{1}{\Delta t_{1,n+(i+2)}} (C_{2,n+(i+2)} (\widetilde{u^{s}_{n}}(t_1) - \widetilde{u^{s}_{n+(i+1)}}(t_1) \\ \qquad + \widetilde{u^{s}_{n}}(t_1) - \widetilde{u^{s}_{n+(i+2)}}(t_1))) + \dfrac{1}{\Delta t_{2,n+(i+2)}} S_{n+(i+2)} \widetilde{p^{f}_{n+(i+1)}}(t_2) \end{array} \right\}$$

3. FETI 방법의 적용

위에 소개된 스태커드 방법은 기존의 방법을 사용하여 발생되던 수치적 불안정성을 보완하였으나 수치적 효율성이 떨어진다는 문제점이 발생한다. 본 논문에서는 Park and Tak(2010)이 제안한 스태커드 방법에 수치적 효율성을 보완하고자 FETI 기법을 접목시켜 제안하였다.

FETI 기법은 도메인 분할 기법으로 C. Farhat(1991)에 의해 제안 되었다. FETI 기법은 여러 개의 하위도메인으로 분할되어 해석된다. 각각의 하위도메인들의 연속성은 하위도메인 사이공간에 Lagrange Multiplier를 통하여 정의된다. Lagrange Multiplier는 미지수로 PCG 알고리즘으로 계산되어진다.

본 논문에서는 가정된 비압축성, 불투수성의 다공질 매체를 각 요소별로 나누어 FETI 방법을 적용하였다. FETI 기법을 적용한 스태커드 방법의 순서도는 그림 1과 같다.

임의의 다공질 매체를 선정 후 다공질 매체 전체의 K_T, D, S, C 가 계산된다. 계산된 후 전체 다공질 매체의 도메인 분할을 해주어 여러 개의 하위도메인이 생성되어지고, 분할된 하위 도메인에서 각각의 K_T, D, S, C 가 하위도메인 별로 계산되어진다. 각 하위 도메인의 계산이 되면 각기 다른 time step이 적용된다. 각기 다른 time step이 적용 되면서 식(1)의 고체영역의 변위, 식(2)의 액체영역의 간극수압이 계산되어진다. 여기서 반복되는 계산은 위에서 제안된 PCG 알고리즘이 사용된다. 기존의 스태커드 방법은 Gauss-Seidel 방법으로 인해 반복계산이 되었지만 본 연구에서는 수치적 효율성을 높이기 위해 PCG 알고리즘이 사용되었다. PCG 알고리즘을 사용하여 계산이 수행되어 질 때에는 전체 영역의 도메인이 아닌 각각의 하위도메인에서 계산이 이루어진다. 반복되는 계산의 결과 값이 알고리즘에서 미리 정해놓은 허용오차의 범위에 만족을 하게 되면 원하는 데이터가 얻어지게 되고 만약 허용오차 범위 내에 들지 못한다면 Remeshing 방법을 통하여 식(3), (4)을 거쳐 다시 처음부터 계산되어진다.

4. 결 론

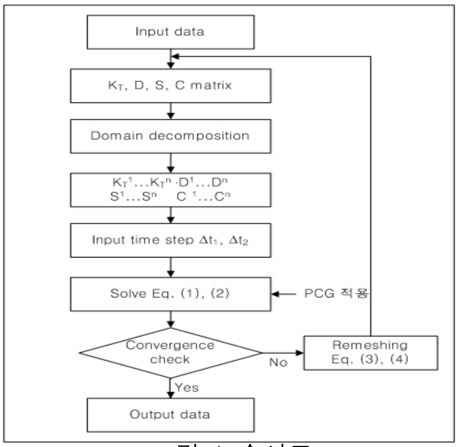

그림 1 순서도

Park과 Tak의 스태커드 방법은 혼합유한요소해석을 이용하여 다공질 매체의 해석이 수행되었다. Multi Time Step, Remeshing 방법, Sub-Iteration 방법을 이용하여 기존 다공질 매체 해석에 있어서 수치적 안정성이 확보 되었다. 본 연구에서는 스태커드 방법의 수치적 안정성이 확보된 상태에서의 효율성을 높이고자 FETI 방법이 접목되었다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부 산하의 한국건설교통기술평가원에서 후원하고 콘크리트 코리아 연구단(05-CCT-D11)의 지원과 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학육성사업(WCU)으로부터 지원받아 수행 되었습니다 (R32-2008-000-20042-0). 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

Babuska, I. (1973) The finite element method with Lagrange multipliers, *Numerische Mathematik*, Vol. 20, No. 3, pp. 179-192.

Biot, M. (1941) General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics,* Vol. 12, No. 1, pp. 155-164.

Borja, R. I. (1986) Finite element formulation for transient pore pressure dissipation: A variational approach. *International Journal of Soli and Structures*, Vol. 22, No. 11, pp. 1201-1211.

C. Farhat. (1991) A Method of Fintie Element Tearing and Interconnecting and Its Parallel Solution Algorithm, *Iternational Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, pp.1205~1277.

Park, T., and Tak, M., (2010) A New Coupled Analysis for Nearly Incompressible and Impermiable Saturated Porous Media on Mixed Finite Element Method: I .Proposed Method, *KSCE*, Vol. 14, No. 1, pp.7~16.

Voyiadjis, G. Z. and Abu-Farsakh, M. Y. (1997) Coupled theory of mixtures for clayey soils. J*ournal of Computers and Geotechnics,* Vol. 20, No. 3/4, pp. 195-222.

Zienkiewicz, O. C., Chang, C. T., and Bettess, P. (1980) Drained, undrained, consolidating and dynamic behavior assumptions in soils. *Geotechnique*, Vol. 30, No. 4, pp. 385-395.