MPI 라이브러리를 이용한 비압축, 비투과성 포화 다공질 매체의 유한요소해석

The Finite Element Analysis for Nearly Incompressible and Impermeable Porous Media Using MPI Library

탁 문 호* • 박 대 효**
Tak, Moonho • Taehyo Park

요 약

포화된 다공질 매체의 수치해석은 일반적으로 혼합유한요소방법(Mixed Finite Element Method)이 쓰인다. 이 혼합유한요소 방법은 고체변형과 유체의 이동을 동시에 고려하게 되는데 고체의 변형이 거의 없이 유체만 이동할 경우나 고체와 유체의 변형이 없이 간극수압만 존재할 경우에는 요소잠김현상(Element Locking)이 발생하여 혼합유한요소방법으로 해석하기에는 수치적으로 불안정해 진다. 본 논문에서는 이러한 수치적 불안정성을 해결한 스태거드 방법(Park and Tak 2010)을 소개하고 수치적 효율성을 위해 MPI(Message-Passing Interface) 라이브러리를 이용한 병렬해석 기법이 적용된다.

keywords : MPI, porous Media, staggered sethod, mixed finite element analysis

1. 서 론

1941년 Biot에 처음 제안된 다공질 매체의 이론식은 Terzaghi의 지반압밀이론에 연속체 역학적 이론을 도입한 개념으로 3차원 지배방정식을 제안하였다. 그의 방정식은 유효응력, 간극수압 관계의 형상학적 접근방법을 통하여 정립되었기 때문에 유한요소 해석에서 쉽게 적용 가능하다는 장점을 가지고 있다. Biot의 지배방정식을 이용한 수치해석 모델은 고체와 유체의 거동을 동시에 고려해야 하기 때문에 하이브리드 요소를 이용한 유한요소법이 활발히 연구되어져 왔다. Zienkiewcz 등(1980)은 지반에서의 압밀 현상을 다공질 매체의 유한요소기법으로 해석하였으며 u/p모델을 제안하였고 특히 고체, 액체, 기체등으로 구성되어 있는 불포화 다공질 매체 모델에 적용이 가능하다는 장점을 갖고 있으나 요소들의 선택에 있어서 연속성과 차수를 신중하게 고려해야 하는 어려움으로 알고리즘을 변화시켜 안정성을 확보하려는 연구가 진행되기도 했다(Park, 1983). 그 후 Voyiadjis 와 Abu-Farsakh(1997)등에 의해 혼합유한요소해석은 고체역학분야로 확장되었다.

혼합유한요소 해석방법에 있어서 고체영역과 액체영역의 형상함수가 다르기 때문에 요소끼리의 연속성(continuity)과 차수의 문제가 발생하게 되므로 선형방정식의 해석에 있어서 직접법(Direct Method 또는 Monolithic)사용이 매우 제약적이다. 연속성 문제의 해결을 위해 혼합유한요소해석에서는 방정식에서 요구하는 하이브리드 요소를 차수에 맞게 사용하였다. 그러나 포화된 다공질 매체 내의 고체가 비압축이고 유체의 흐름은 거의 없다고 가정되면 해석에 있어서 요소잠김현상이 발생하게 되므로 하이브리드 요소의 차수 선택폭이 줄어들게 되고, 차수가 다른 요소를 사용함에 있어서 수치상의 효율성과 정확성은 문제를 발생시킨다. 이러한 현상의 해결을 위해서는 Baduska-Brezzi 조건이나 Patch Test를 만족하거나 모델의 동적해석에서

* 제 1저자, 학생회원 • 한양대학교 건설환경공학과 박사과정 pivotman@hanyang.ac.kr
** 교신저자, 정회원 • 한양대학교 건설환경공학과 교수 cepark@hanyang.ac.kr

직접법대신 스태커드방법을 사용하는 것이다.

다른 차수의 요소를 사용함에 있어서 단점으로 지적되어온 문제들의 해결을 위해 동일차수요소를 사용하는 연구는 활발히 진행되어졌다. 쉽게 사용할 수 있는 동차요소(equal order element)에서 시간적분법과 분할기법을 사용하는 방법으로 구성 물질의 특성에 따라 explicit-implicit, implicit-implicit 으로 나누어 해석이 된다. 그러나 임계시간 결정과 비압축, 비투과성을 갖는 재료에서는 안정성해석이 필요하다는 단점을 갖고 있다. Park and Tak(2010)은 동일차수요소를 사용하여 비압축, 비투과성 포화 다공질 매체 해석기법을 개발하였다. 본 논문에서는 Park and Tak(2010)이 제안한 스태거드 방법을 소개하고 선형방정식을 풀기 위해 반복계산 동안에 순차적으로 계산되는 과정에 MPI 라이브러리를 접목시켜 수치적 효율성을 얻고자 하였다.

2. 지배방정식

질량평형방정식은 고체영역에 대한 Darcy's law와 상대물질시간도함수를 적용하여 거동하는 포화된 다공질 매체로 가정하고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{\alpha-n}{K^s}\right)\frac{\partial p^f}{\partial t}\alpha\nabla\cdot\mathbf{v}^s+\frac{1}{\rho^f}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{k}}{\mu^f}\left(-\nabla p^f+\rho^f\mathbf{g}\right)\right)=0 \qquad (1)$$

여기서 α는 Biot 상수, K^s는 고체의 체적계수, p^f는 간극수압, v^f는 고체의 속도 벡터, ρ^f는 액체밀도, k는 투수텐서, μ^f는 동점성 계수, g는 중력벡터를 나타낸다.

선형 운동량평형방정식은 전 영역에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\sigma}''-\mathbf{I}p^f\right)+\rho\mathbf{b}=0 \qquad (2)$$

여기서 σ''는 Cauchy stress 텐서, I는 Identity 텐서, ρ는 전 영역의 밀도를 나타낸다.

3. 유한요소해석

Park과 Tak(2010)이 제안한 스태커드 방법(Staggered Method)은 식 (1)과 (2)를 이용해 다중시간(Multi time step), 매쉬의 재구성(Remeshing), 재 반복(Sub-iteration)으로 구분되어 해석된다. 다중시간과정에서는 유체와 고체의 상관관계해석에서 제안된 방법으로써 영역간의 경계면을 해석하기에 제약사항들이 존재한다. 이러한 제약사항들로 인해 수치적인 정확성이 떨어지게 되는데 매쉬의 재구성으로 인하여 다중시간에서 얻게 되는 부정확한 결과들에 대해 정확성을 얻게된다. 재 반복 단계에서는 다중시간과 매쉬의 재구성 단계를 반복 계산하는 단계로 수렴 값들이 합리적으로 평형상태에 도달할 수 있도록 하는 과정이다. 여기서 수렴성의 제한을 적용함으로서 다중시간내의 절대시간을 정할 수 있다.

시간이력해석을 위해 초기조건과 경계조건이 적용된 혼합방정식에 후향자분법(backward difference method)을 적용하면,

$$\tilde{\mathbf{u}}^s_{n+1}=\mathbf{K}^{-1}_{t,n+1}\left\{\mathbf{f}^s_{n+1}+\mathbf{c}_{1,n+1}\tilde{\mathbf{p}}^f_{n+1}\right\} \qquad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}^f_{n+1}=\left[\mathbf{D}_{n+1}+\frac{1}{\triangle t_{2,n+1}}\mathbf{S}_{n+1}\right]^{-1}\left\{\begin{aligned}&\mathbf{f}^f_{n+1}+\frac{1}{\triangle t_{2,n+1}}\mathbf{S}_{n+1}\tilde{\mathbf{p}}^f_n\\&+\frac{1}{\triangle t_{1,n+1}}\left(\mathbf{C}_{2,n+1}\left(\tilde{\mathbf{u}}^s_n-\tilde{\mathbf{u}}^s_{n+1}\right)\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

여기서 $\triangle t_{1,n+1}$는 변위에 대한 시간간격,$\triangle t_{2,n+1}$는 간극수압에 관한 시간간격을 나타낸다.

식 (3)에서 매쉬의 재구성을 거쳐 간극수압 p^f에 관하여 나타내면,

$$\tilde{\mathbf{p}}^{f}_{n+(i+2)}(t_2) = \left[\mathbf{D}_{n+(i+2)} + \frac{1}{\triangle t_{2,n+(i+2)}}\mathbf{S}_{n+(i+2)}\right]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}^{f}_{n+(i+2)} + \frac{1}{\triangle t_{1,n+(i+2)}}\left(\mathbf{C}_{2,n+(i+2)}\left(\tilde{\mathbf{u}}^{s}_{n}(t_1) - \left(\tilde{\boldsymbol{u}}^{r}_{n+(i+1)}(t_1) + \tilde{\boldsymbol{u}}^{s}_{n+(i+2)}(t_1)\right)\right)\right) \\ + \frac{1}{\triangle t_{2,n+(i+2)}}\mathbf{S}_{n+(i+2)}\tilde{\mathbf{p}}^{f}_{n+(i+1)}(t_2) \end{array} \right\} \quad (5)$$

재 반복 과정에서는 Gauss-Seidel 방법을 사용하여 수렴제한범위를 정할 수 있다.

$$\frac{\| \tilde{\mathbf{u}}^{s}_{n+(i+2)} - \tilde{\boldsymbol{u}}^{s}_{n+(i+1)} \|}{\| \tilde{\boldsymbol{u}}^{s}_{n+(i+2)} \|} < \varepsilon_1, \quad \frac{\| \tilde{\mathbf{p}}^{f}_{n+(i+2)} - \tilde{\mathbf{p}}^{f}_{n+(i+1)} \|}{\| \tilde{\mathbf{p}}^{f}_{n+(i+2)} \|} < \varepsilon_2 \quad (6),(7)$$

여기서 ε_1, ε_2는 변위와 간극수압에 대한 제한범위를 나타낸다.

4. MPI(Message-Passing Interface) 라이브러리 알고리즘

위 식 (3), (4)를 이용해 변위와 간극수압을 얻기 위해서는 매쉬 재구성을 통한 반복계산이 진행되어야 한다. 스태거드 방법에서는 제한범위(Tolerance)에 따라 수렴정도를 알 수 있는데 본 모델과 같은 수치불안정성을 내포하는 모델들은 수렴까지의 반복계산수가 많이 필요하다. Park and Tak(2010)이 제안한 모델에서는 스태거드 방법이 식(3)과 (4)가 차례대로 계산되어지는 순차계산 방법이 도입되었으나 본 연구에서는 식(3), (4)를 동시에 계산할 수 있는 MPI 라이브러리를 접목시키고 반복계산수를 줄이는 방법을 모색하고자 한다.

MPI 라이브러리는 점대점통신(point-to-point)이나 집합통신(Collective)을 통하여 메시지를 전송하는 규약이다. 점대점통신의 경우 하나의 cpu에서 다른 하나의 cpu로의 메시지를 전송하는 방법으로 메시지를 전송함에 있어 양방향 통신이 가능해야 하는데 하나의 cpu에서 다른 cpu로 메시지를 전송하고 다른 작업을 할 수 있는지에 따라 블록킹통신(blocking)과 논블록킹통신(nonblocking)으로 나눌 수 있다. 블록킹통신의 경우 메시지를 전송한 다음 전송 메시지가 이상 없이 도착되었다는 메시지를 받기 전까지는 그 cpu가 다른 작업을 할 수 없는 알고리즘이고 논블록킹통신은 전송 메시지의 도착유무 없이 다른 작업이 가능한 알고리즘이다. 집합통신의 경우 여러 노드들로 구성되어 있는 클러스터링 시스템 또는 SMP(Symmetric Multiprocessing)과 같이 여러 개의 cpu가 하나의 메모리를 공유해서 쓰는 장비에 적합하다. 일반적으로 FEM 영역분할 기법에서 집합통신이 효율적이다.

본 연구에서는 스태커드 방법에 점대점 통신을 이용하고자 한다. 위에서 소개된 스태거드 방법에 블록킹, 논블록킹 통신에 대한 점대점 통신을 접목하여 나타내면 표 1 과 같다.

블록킹 통신에서는 동시에 CPU1과 CPU2에서 각각 변위와 간극수압이 계산되어진다. 그리고 상대 CPU에 결과값들을 전송한다. 이때 교착상태를 주의해야 하는데 전송데이터의 크기가 다르면 교착상태는 발생하지 않는다. 하나의 4노드 다공질 매체 요소의 경우 변위는 8개, 간극수압은 4개가 존재함으로 서로의 데이터 전송에서는 CPU1이 CPU2에서 전송되어진 간극수압을 먼저 받게 된다. 또한 이는 식(3)과 식(4)의 계산이 동시에 끝나는 조건으로 실제 계산에서는 동일하게 끝나는 현상이 거의 존재하지 않는다. 그러므로 실제 교착상태에 대한 문제는 발생하지 않는다.

논블록킹 통신에서는 CPU1과 CPU2가 동시에 식(3)과 식(4)를 동시에 계산하고, 그 결과값들을 상대 CPU에 전송한다. 이때 전송 후 각 CPU들은 다른 계산 작업을 수행하게 되는데 CPU1은 결과값에서 나온 변위를 이용해 매쉬재배열 과정을 진행하고 CPU2는 전노드에 간극수압을 가정하는 계산을 수행한다. 그 후 다른 CPU에서 전송되어온 결과값들을 대입하여 다시 식(3)과 식(4)를 계산한다. 이러한 과정들을 반복적으로 계산하여 결국 수렴값을 찾게 되고 결과값들을 결정할 수 있다. 논블록킹 통신에서는 블록킹 통신의 2.1.2 과정을 포함시킴으로서 수치적 효율성을 기대할 수 있으나 추가적으로 계산과정이 필요한 매쉬 재배열 과정과 간극수압 가정 과정은 계산 속도에 따라 블록킹 통신보다 비효율적일 수 있다.

블록킹 통신	논블록킹 통신
1. 강성행렬 및 하중백터 계산 2. 주반복(Iteration for transient) 시작 2.1 부반복(Sub_iteration for stability) 시작 2.1.1 스태거드 시작 2.1.1.1 CPU1: Eq.(3)계산 및 CPU 2로의 변위백터 송신(MPI_Send) CPU2로부터 간극수압백터 수신(MPI_Recv) 2.1.1.2 CPU2: Eq.(4) 계산 및 간극수압백터 CPU 1으로 송신(MPI_Send) CPU1로부터 변위백터 수신(MPI_Recv) 2.1.1.3 CPU 2: 스태거드 수렴 및 Deadlock 확인 2.1.2 매쉬재배열(Remeshing), 간극수압 가정 2.1.3 Eq.(5) 계산 2.2 부반복 수렴확인 3. 변위 및 간극수압 값 결정	1. 강성행렬 및 하중백터 계산 2. 주반복(Iteration for transient) 시작 2.1 부반복(Sub_iteration for stability) 시작 2.1.1 스태거드 시작 2.1.1.1 CPU 1: Eq.(3)계산 및 CPU 2로의 변위백터 송신(MPI_ISend) 매쉬재배열(Remeshing) CPU 2로부터 간극수압백터 수신(MPI_IRecv) 및 Eq.(3) 계산 2.1.1.2 CPU 2: Eq.(4) 계산 및 변위백터 간극수압백터 CPU 1으로 송신(MPI_ISend) 간극수압 가정, 스태거드 수렴 및 Deadlock확인, CPU 1로부터 변위백터 수신(MPI_IRecv) 2.1.3 Eq.(5) 계산 2.2 부반복 수렴확인 3. 변위 및 간극수압 값 결정

그림 1 블록팅 통신과 논블록킹통신의 비교

4. 결론

포화된 다공질 매체의 해석에 있어서 고체와 액체 영역의 연속성과 차수의 결정에 있어서 많은 제약과 따른다. 수치적 정확성을 위해 Park and Tak(2010)이 제안한 스태커드 방법이 사용되었다. 스태커드 방법은 수치적 정확성이 확보되었지만 수치적 효율성에서 문제점이 발견되었다. 이를 보완하고자 불안정한 수치모델에서의 반복계산에 MPI를 접목시켜 반복계산을 줄이고 수치적 효율성을 높이는 것을 제안하였다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부 산하의 한국건설교통기술평가원에서 후원하고 콘크리트 코리아 연구단(05-CCT-D11)의 지원과 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학육성사업(WCU)으로부터 지원받아 수행 되었습니다 (R32-2008-000-20042-0). 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

Babuska, I. (1973) The finite element method with Lagrange multipliers, *Numerische Mathematik*, Vol. 20, No. 3, pp. 179-192.

Biot, M. (1941) General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics,* Vol. 12, No. 1, pp. 155-164.

Park, K. C. (1983). Stabilization of partitioned solution procedure for pore fluid-soil interaction analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 19, No. 11, pp. 1669-1673.

Park, T., and Tak, M., (2010) A New Coupled Analysis for Nearly Incompressible and Impermiable Saturated Porous Media on Mixed Finite Element Method: Ⅰ.Proposed Method, *KSCE,* Vol. 14, No. 1, pp.7～16.

Voyiadjis, G. Z. and Abu-Farsakh, M. Y. (1997) Coupled theory of mixtures for clayey soils. J*ournal of Computers and Geotechnics,* Vol. 20, No. 3/4, pp. 195-222.

Gropp, William., Lusk, Ewing., and Skjellum, Anthony, (1999) Using MPI - 2nd Edition: Portable Parallel Programing with the Message-Passing Interface , *MIT Press*, Massachusetts.

Zienkiewicz, O. C., Chang, C. T., and Bettess, P. (1980) Drained, undrained, consolidating and dynamic behavior assumptions in soils. *Geotechnique*, Vol. 30, No. 4, pp. 385-395.