

# 일반유한요소법을 이용한 응력확대계수 계산

## Computation of Stress Intensity Factors using Generalized Finite Element Method

• 홍 원 택\* • 이 필 승\*\*  
• Hong, Won-Tak • Lee, Phill-Seung

### 요 약

본 논문에서는 일반유한요소법(Generalized Finite Element Method)를 이용하여 응력확대계수를 계산하는 방법을 소개한다. 기존의 유한요소법을 사용하여 응력확대계수를 계산하기 위해서는 J-integral 방법을 이용한 후처리 과정이 필수적으로 요구된다. 뿐만 아니라 균열선단 근방에서의 응력을 기술하기 위해서는 세밀한 요소망(mesh)이 요구된다. 후처리 과정과 균열선단 근방에서의 요소망은 수치적 오류를 발생시키고 이는 정확한 응력확대계수를 얻는데 어려움을 준다. 일반유한요소법은 근사함수를 요소망의 영향 없이 추가해서 사용할 수 있는 장점을 가지고 있지만, 활용성 측면에서 기존의 유한요소법보다 복잡하여 실용성이 떨어진다. 본 논문에서는 일반유한요소법의 장점을 충분히 살려 균열선단근방에서는 응력을 모델링하여 근사함수로 사용하고 균열선단에서 거리가 먼 곳은 기존의 유한요소를 써서 계산을 하였다. 특별한 후처리 과정(Post processing) 없이 비교적 정확한 응력확대계수를 손쉽게 얻을 수 있다. 일반유한요소법을 이용한 제시된 방법론이 타당함을 수치 예제를 통하여 확인하였다.

**keywords** : 일반유한요소법, 응력확대계수, 유한요소법, 균열 해석

### 1. 서 론

응력확대계수는 균열의 진전 여부를 판단하는데 쓰이는 유용한 지표이다. 그러나, 유한요소법을 사용하여 응력확대계수를 얻기 위해서는 균열선단 근방에서 아주 세밀한 요소망이 필요할 뿐만 아니라 Virtual Crack Closure Technique(VCCT)이나 J-integral 방법 등의 후처리를 하여야만 한다. 본 연구에서는 응력확대계수가 궁극적으로는 급수로 전개된 변위의 첫 번째 항의 계수인 점을 이용하여, 다항식이 아닌 근사함수를 추가 사용하여 응력확대계수를 후처리 없이 얻는 방법을 소개한다. 다항식뿐만 아니라 비다항식(non polynomial) 근사함수를 일반적으로 사용할 수 있는 방법은 Melenk에 의해 최초로 소개된 후 일반유한요소법으로 알려져 있다 (Melenk and Babuska, 1996).

### 2. 일반유한요소법

\* 정회원, 한국과학기술원 복합시스템설계 연구소 연구원 wontak@kaist.edu

\*\* 정회원, 한국과학기술원 해양시스템공학전공 부교수 phillseung@kaist.edu

일반유한요소법은 주어진 정의역에서 합이 1이 되도록 하는 파티션함수( $\sum_i \psi_i(x,y) = 1, \forall (x,y) \in \Omega$ )를 이용하여 여러 영역으로 정의역을 나눈 후, 파티션된 영역위에 근사함수를 요소망과는 독립적으로 다항식 혹은 비다항식으로 제작하여 사용하는 방법이다. 근사함수의 제작이 요소망과는 독립적이기 때문에 Meshless Method라고도 불린다. 기존 유한요소의 형상함수 합이 1이 되므로 일반유한요소법은 기존 유한요소를 포함하게 된다. 본 연구에서 사용된 근사공간은 기존의 유한요소와 비다항식 근사함수가 포함된 좀 더 일반적인 벡터공간이다. 이절에 언급된 근사함수들은 이 일반화된 근사공간을 사용하고 이러한 근사공간을 이용한 Galerkin 근사 방법을 일반유한요소법이라 부른다. 일반유한요소법에 대한 자세한 배경과 설명은 참고 문헌(Babuska, 1996)에 있다.

기존 유한요소법과 일반유한요소법의 가장 큰 차이는 일반유한요소법의 경우 근사함수로 다항식 혹은 비다항식으로 쓸 수 있다는 데 있다. 물론, 다항식이 아닌 근사함수의 사용이 일반유한요소법이 처음은 아니다 (Lynn 1997). 하지만 기존의 방법들은 비다항식 근사함수와 유한요소를 함께 사용하기 위해 특별한 조작성을 가해야만 했다. 본문에 사용된 일반유한요소법은 앞서 언급된 파티션함수가 요소의 특별한 조작성 없이 비다항식 근사함수를 사용할 수 있게 한다는 측면에서 사용이 용이할 뿐 아니라 근사공간을 기술하는데도 수학적으로 자연스럽다(Melenk 1996). 그림 2는 일반유한요소법을 사용하여 균열선단 근방의 응력을 해석한 사례이다(Hong 2009). 그림 2(c)를 보면 고차 유한요소를 사용했음에도 불구하고 균열선단의 끝 부분으로부터 0.001의 거리에서 응력이 참값에 비해 30%정도밖에 미치지 못함을 볼 수 있다. 한편, 비다항식 근사함수를 직접적으로 사용한 일반유한요소법은 적은 자유도를 가짐에도 불구하고 정확한 결과를 보여준다.

### 3. 선형탄성문제와 응력확대계수

선형 탄성문제는 변위벡터  $\vec{u} = (u, v)^T$ 를 Sobolev공간  $H_0^1(\Omega)$ 에서 찾는 문제로  $H_0^1(\Omega)$ 에 속한 임의의 벡터  $\vec{v} \in H_0^1(\Omega)$ 에 대해서  $B(\vec{u}, \vec{v}) = F(\vec{v})$  을 만족시키는  $\vec{u}$  를 찾는 것으로 귀결된다. 여기서,  $B(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} ([D]\vec{u})^T [E]([D]\vec{v}) dx dy$  와  $F(\vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{v}^T \vec{f} dx dy + \oint_{\Gamma_N} \vec{v}^T \vec{T} ds$  을 의미한다. 한편 변형에너지 (strain energy)  $U(\vec{u})$  는  $U(\vec{u}) = \frac{1}{2} B(\vec{u}, \vec{u})$  와 같다.

일반적으로 균열선단 근방의 변위는 직교좌표계상에서 다음과 같이 기술할 수 있다(Szabo 1991).

$$\begin{cases} u = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^I u_k^I + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{II} u_k^{II}] \\ v = v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k^I v_k^I + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{II} v_k^{II}] \end{cases}$$

급수의 첫 번째 계수인  $A_1^I, B_1^I$ 는 각각 대칭 모우드 I 응력확대계수  $K^I$ ,  $A_1^{II}, B_1^{II}$ 는 각각 비대칭 모우드 II 응력확대계수  $K^{II}$ 이다.  $A_1^I$ 과  $B_1^I$ 는 이론적으로 같아야 하지만 본 연구에서는 각각 다르게 사용되었으나 함께 사용된 유한요소의 차수가 올라감에 따라  $K^I$ 에 수렴한다.  $A_1^{II}$ 과  $B_1^{II}$  또한  $K^{II}$ 에 수렴한다. 앞서 서론에서 언급되었듯이 일반유한요소법은 근사함수를 요소망과 무관하게 사용할 수 있다. 즉,  $x$  변위의 근사함수로는  $u_k^I, u_k^{II} k=1, \dots, N$  을  $y$  변위의 근사함수로는  $v_k^I, v_k^{II} k=1, \dots, N$  을 사용하면 사용된 각 근사함수의 계수(혹은 진폭)가 응력확대계수가 되어 후처리과정(Post processing)없이 균열선단 근방의 응력확대계수를 얻을 수 있게 된다.

이에 반해 가장 손쉬운 응력확대계수의 계산은 Strain Energy Release Rate인  $G$ 를 이용한 방식으로  $G \approx \frac{U(a+\Delta) - U(a-\Delta)}{2\Delta}$  와 같이 변형에너지 차분법을 이용하여 근사하는 방법이 가장 쉽다. 하지만 이러한 접근법은 균열선단의 변화량  $\Delta$ 가 작아야 유효한데  $\Delta$ 를 작게하면,  $G$ 를 근사하는데 있어서 매우 작은 숫자로 나누게 되어 정확하지 않을 뿐 아니라 유한요소해석을 두 번 반복해야한다는 단점이 있다.

다른 방법으로는 Virtual Crack Closure Technique(VCCCT)와 J-integral을 사용하는 방법이 있다. 전자는 모우드I 과 모우드II의 에너지 방출비율을 다음과 같이 계산한다.

$$G_I \approx \frac{1}{2\Delta} \int_0^\Delta \sigma_{yy} [v(\Delta - r, \pi) - v(\Delta - r, -\pi)] dr, \quad G_{II} \approx \frac{1}{2\Delta} \int_0^\Delta \sigma_{xy} [u(\Delta - r, \pi) - u(\Delta - r, -\pi)] dr,$$

여기서,  $G_I + G_{II}$ 의 총합은  $G$ 로 수렴한다. 한편, 후자인 J-integral 역시 Strain Energy Release Rate인  $G$ 를 계산하는 방식으로  $J = \int_\Gamma \left( \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds$  과 같이 계산한다. 변형에너지밀도(strain energy density)이고  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ 이다.  $\Gamma$ 는 균열선단 근방의 임의 경로로 택한다.

이 외에도 응력확대계수를 얻는 여러 가지 방법이 있지만 대다수는 Strain Energy Release Rate을 이용한 간접적 방식이라고 할 수 있다. 2차원 평면응력의 경우 구해진 Strain Energy Release Rate를  $G = \frac{K_I^2}{E}$  을 이용해 응력확대계수로 전환한다. 소개된 일반유한요소법은 Strain Energy Release Rate를 이용하지 않고 응력확대계수를 얻는다.

#### 4. 해석결과 및 분석

앞서 소개한 일반유한요소법의 타당성을 검증하기 위해 (Szabo and Babuska,1991)에 소개된 예제를 해석하였다. 해석에 사용된 탄성체  $\Omega = \{(x, y) : -2 \leq x, y \leq 2\}$ 는 그림 1과 같이 음의  $x$ 축에 균열이 있고 영의 계수  $E = 1000$ 과 포아송비  $\nu = 0.3$ 이다. 그리고 대칭 모우드(모우드I)의 응력확대계수가 1 이 되도록 균열선단을 포함한 모든 경계에 다음 응력을 경계조건으로 주었다. 단, 강체의 움직임을 막기 위하여  $(0,0)$ 에서  $x$ 변위와  $y$ 변위를 모두 구속하였고  $(2,2)$ 지점에서  $y$ 변위를 구속하였다.

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{4\sqrt{r}} \left( 3\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right), \sigma_{yy} = \frac{1}{4\sqrt{r}} \left( 5\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right), \sigma_{xy} = \frac{1}{4\sqrt{r}} \left( \sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

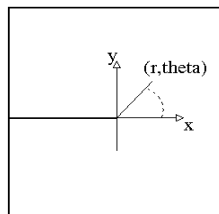


그림 1 균열이 있는 탄성체

본 연구에서는 균열선단 근방에서만 일반유한요소법을 사용, 근사함수로 다음 함수  $u_1^I$ 와  $v_1^I$ 를 사용하였다. 단, 근사함수는 파티션함수에 의해서 그 정의역이 제한된다.

$$u_1^I = \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{2\pi}} r^{\frac{1}{2}} \left( \frac{5-2\nu}{2(1+\nu)} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad v_1^I = \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{2\pi}} r^{\frac{1}{2}} \left( \frac{7-2\nu}{2(1+\nu)} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

표 1  $K^I$  (응력 확대계수)

p	$A_1^I$ (%오차)	$B_1^I$ (%오차)
1	0.6884 (31%)	0.7009 (30%)
2	0.8172 (18%)	0.8105 (19%)
4	0.9287 ( 8%)	0.9293 ( 8%)

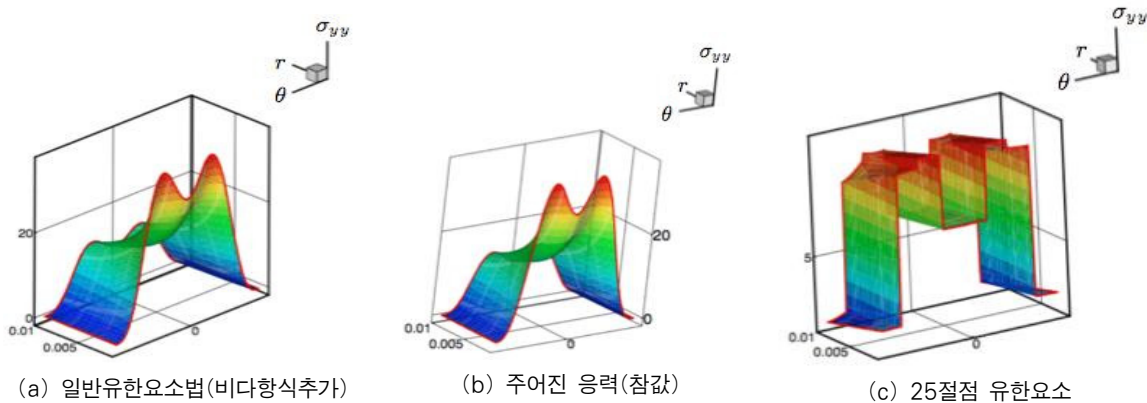


그림 2 응력  $\sigma_{yy}$  의 비교

표1 에서 p는 사용된 유한요소의 차수를 나타낸다. 경계조건을 유한요소로 보간(interpolation)해야 하기 때문에 균열선단 근방에 비다항식 근사함수를 사용하더라도 고차 유한요소가 함께 쓰여야 보다 정확한 응력확대계수를 얻을 수 있다. 3절에서 언급되었듯이  $A_1^I$ 와  $B_1^I$ 가 이론상으로는 같아야 하고  $A_1^I$ 와  $B_1^I$ 는  $K^I$ 으로 수렴해감을 볼 수 있다. 특별한 후처리 없이  $A_1^I$ 와  $B_1^I$ 가 예상된 응력 확대계수인 1로 수렴해 가는 것을 표 1을 통하여 확인할 수 있다.

### 감사의 글

TJ Park Postdoctoral Fellowship을 통해 연구를 지원한 포스코 청암 재단에 감사드립니다.

### 참고문헌

- B Szabo, I Babuska.** (1991) Finite Element Analysis, *John Wiley*.
- W Hong.** (2009) A Meshless Method with Enriched Basis Functions for Singularity Problems, *Ph.D. Dissertation, UNC at Charlotte*
- I Babuska, U Banerjee, J Osborn** (1996) The parition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139(1996), pp.289~314.
- P Lynn, A Ingraffea** (1997) Transition elements to be used with quarter-point crack-tip elements, *Int J Numer Methods Eng.* 40(1997), pp.1031~1036..
- J Melenk, I Babuska** (1996) The parition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139(1996), pp.289~314.