

# 교량의 모드 중첩법을 이용한 3차원 KTX-교량의 동적상호작용 해석

## Dynamic interaction analysis of KTX-Bridge using mode superposition Method

김문영\* · 이준석\*\* · 정명락\*\*\* · 민동주\*\*\*\*

Kim, Moon-Young · Lee, Joon-Seok · Jung, Myung-Rag · Min, Dong-Joo

### 요약

본 논문에서는 교량의 자유진동 모드의 중첩원리를 이용하여 KTX-교량의 동적상호작용 해석법을 제시한다. 이를 위하여 모드중첩법에 기초한 3차원 교량-차량의 에너지 식으로부터 에너지원리를 적용하여 교량과 차량의 상호작용을 고려할 수 있는 운동방정식을 유도한다. 이때 운동방정식의 해는 Newmark- $\beta$  방법을 사용한다. 그리고 궤도의 불규칙성은 FRA의 6등급 분류규정을 고려하여 각 등급별로 고속철도의 열차속도에 따르는 응답을 분석한다. 실제 고속철도에 사용되는 PSC 박스형 교량을 상용프로그램(MIDAS)를 이용하여 모델링하고 그로부터 각 모드별 형상을 얻어내어 본 논문에서 개발한 열차-교량 상호작용 프로그램에 입력하여 상호작용 해석을 수행한다.

**keywords** : 상호작용, 모드중첩법, Newmark- $\beta$  방법, 동적응답, Lagrange식

### 1. 서론

교량의 응답은 차량에 의해 야기되는 철도와 교량에서 발생하는 진동으로부터 고려되기 시작하였고 이런 주제의 연구는 Willis(1847)에 의해 처음으로 수행되었으며 철도교 진동에 대해서는 수많은 실험연구가 수행되었으며 박홍석(1998)은 관절대차를 포함하는 KTX열차에 대한 정밀 모델 해석법을 반복법을 이용하여 수행하였으며 김성일(2000)은 KTX정밀모델을 이용하여 교량과의 공진효과 등에 관해서 기술하였다.

본 논문에서는 교량과 차량의 모형에 대하여 다음과 같은 방법으로 연구를 진행한다. 38자유도의 동력차 22자유도의 동력객차, 22자유도의 객차모형에 대한 각각의 행렬방정식을 유도하고 이로부터 총 20량의 연행된 열차의 전체행렬을 구성한다. 트랙의 경우 궤간틀림(gauge), 수평틀림(cross level), 줄틀림(nominal alignment), 고저틀림(nominal vertical profile)으로 정의되는 불규칙성을 PSD(파워 스펙트럼 밀도)함수로부터 FRA에 규정된 총 6가지의 등급을 고려하였다.

해석에서는 수치적분방법으로는 Newmark- $\beta$  method를 사용하였으며 제한사항으로는 교량의 동적 해석 시 차량의 질량은 외력으로 고려하며 교량은 선형-탄성적으로 모형화 한다. 차량이 교량에 미치는 영향은 스프링과 감쇠를 이용하여 연직 및 횡방향을 고려한다. 교량상에서 차량은 직선으로 주행하며, 주행속도는 일정하다고 가정한다.

\* 김문영 · 성균관대학교 토목공학과 교수 kimye@skku.edu

\*\* 이준석 · 청석엔지니어링 junsok73@yahoo.co.kr

\*\*\* 정명락 · 성균관대학교 토목공학과 석사과정 psjehun@naver.com

\*\*\*\* 민동주 · 성균관대학교 토목공학과 석사과정 marshow@nate.com

## 2. 해석전 모델링 및 방법

일반적인 교량의 해석을 위해서 교량의 운동에너지와 위치에너지는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_b = \frac{1}{2} \mathbf{d}_b^T \dot{\mathbf{M}}_b \dot{\mathbf{d}}_b \quad (2.1a)$$

$$V_b = \frac{1}{2} \mathbf{d}_b^T \mathbf{K}_b \mathbf{d}_b \quad (2.1b)$$

여기서  $\mathbf{M}_b, \mathbf{K}_b, \mathbf{d}_b$  는 각각  $N \times N$  질량 및 강도행렬 그리고 절점변위벡터이고,  $N$  은 교량모델의 총자유도 수를 표시한다.

$$\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{d}}_b + \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{d}}_b + \mathbf{K}_b \mathbf{d}_b = \mathbf{F}_b \quad (2.2)$$

모드중첩법에서는 식 (2.2)의 질량 및 강도행렬을 이용하여 자유진동해석을 수행하여 고유진동수와 진동 모드형상을 구할 필요가 있다. 전체 진동수 중에서 저차 모드형상부터 순차적으로  $n (\ll N)$  개의 고유진동수와 모드형상을 선택하면 아래와 같다.

$$(\omega_i^2, \Phi_i), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

질량행렬에 대하여 정규화(normalize)된  $n$  개의 진동 모드를 일반화된 좌표  $q_i$  (Modal Coordinate)로 선택하면 교량의 에너지는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$T_b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \quad (2.4a)$$

$$V_b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 q_i^2 \quad (2.4b)$$

$$D_b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i^2 \quad (2.4c)$$

여기서  $D_b, \xi_i, \omega_i$  는 각각 감쇠에너지와  $i$  번째 모드에 대응하는 비례감쇠계수 및 고유 각진동수(rad/sec)를 나타낸다. 요소 감쇠행렬의 구성은 점성감쇠(Rayleigh damping or viscous damping)를 사용하였으며, 이 방법에 의한 감쇠행렬은 질량행렬과 강성행렬의 선형조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (2.5)$$

여기서  $a_0, a_1$  은 임의의 진동수에 의해 계산되어지는 비례상수이고, 만약  $\xi_m = \xi_n = \xi$  이면 2.6과 같다

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_m + \omega_n} \begin{bmatrix} \omega_m \omega_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

교량의 에너지와 차량의 에너지로부터 교량과 차량의 운동방정식을 유도하기 위하여 (2.7)과 같은 라그랑지안 식을 이용할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{p}_k} \right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial p_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}_k} = 0 \quad (2.7)$$

여기서,  $T = T_b + T_v$  ;  $V = V_b + V_v$  ;  $D = D_b + D_v$

식 2.7에서 T와 V와 그리고 D는 각각 운동에너지 위치에너지 그리고 분산에너지를 나타내며 여기서  $p_k$  는 일반화 된 좌표로써 교량의 변위와 차량의 변위를 적용하게 되면 시간 t에서의 교량부분의 자유도와 관련된 운동방정식과 차량의 운동방정식을 각각 얻을 수 있다.

KTX열차의 모델은 최성락(2001)년도 모델을 인용하였고 전체 KTX열차의 행렬구성망을 구성하는데 있어서 동력객차와 객차가 대차를 공유하는 시스템이므로 차체의 3방향자유도( $x_c, y_c, z_c$ )의 자유도를 구속하였다. 또한 차량의 진행방향(x)역시 속도항으로써 일정하다고 보고 같이 구속하였다. 한편 차량의 앞부분을 공유하다보면 어쩔수 없이 대칭성을 이루기 위해서 반대편으로 모델이 이루어지게 된다. 이를 위해서 각 차량은 진

행방향으로 구성하되 대칭을 이루는 부분에서는 역방향으로 차량을 구성하고 전체행렬을 구성할 때  $z$ 방향에 대한 180도의 회전을 가지는 좌표변환을 실시하여서 전체차량행렬을 구성하였다.

각각의 궤도불규칙성은 실험적으로 정량화되었으며 FRA에서는 6개의 등급으로 이를 나누고 있으며, 6등급일 경우가 가장 양호하며 1등급일 때가 가장 불량한 궤도불규칙성으로 정의하고 있다. 또한 각 등급에 따른 한계속도 및 한계불규칙성을 규정하고 있다. 각각의 불규칙성을 지수스펙트럴 밀도함수(PSD)  $S(\phi)$ 로써 정의가능하며 Hamid 등에 의해 개발되어 미국 FRA에 규정되어 있다. 이러한 궤도불규칙성은 모의발생기법을 이용하여 생성가능하며, 이를 위하여 궤도불규칙성의 평균값이 영인 정규확률분포로 가정하고 지수스펙트럴 밀도로 주어진 불규칙성을 DFT(Discrete Fourier Transform)기법을 이용하여 조화함수의 합으로 나타낼 수 있다. 이는 PSD가 주파수 영역의 함수이므로 이를 길이로 치환하기 위함이다. 따라서 앞서 정의된 궤도의 불규칙성은 다음 식 (3.3)으로 정의 된다.

$$w(s) = \sum_{i=1}^n \sqrt{4S(\phi_i)\Delta\phi} \cos(\phi_i s - \theta_i) \quad (3.3)$$

여기서  $s$ 는 거리이며  $\Delta\phi$ 는 주파수의 간격,  $n$ 는 정규화된 파형의 개수,  $\theta_i$ 는 균일확률변수로서  $[0, 2\pi]$ 의 범위를 가진다. 궤도의 불규칙성을 발생시키기 위해서  $\phi$ 의 범위를  $0.001 \sim 1.0$  cycle/m로 한정하였다. 그림 1은 이로부터 얻어진 PSD함수를 보여주고 있다.

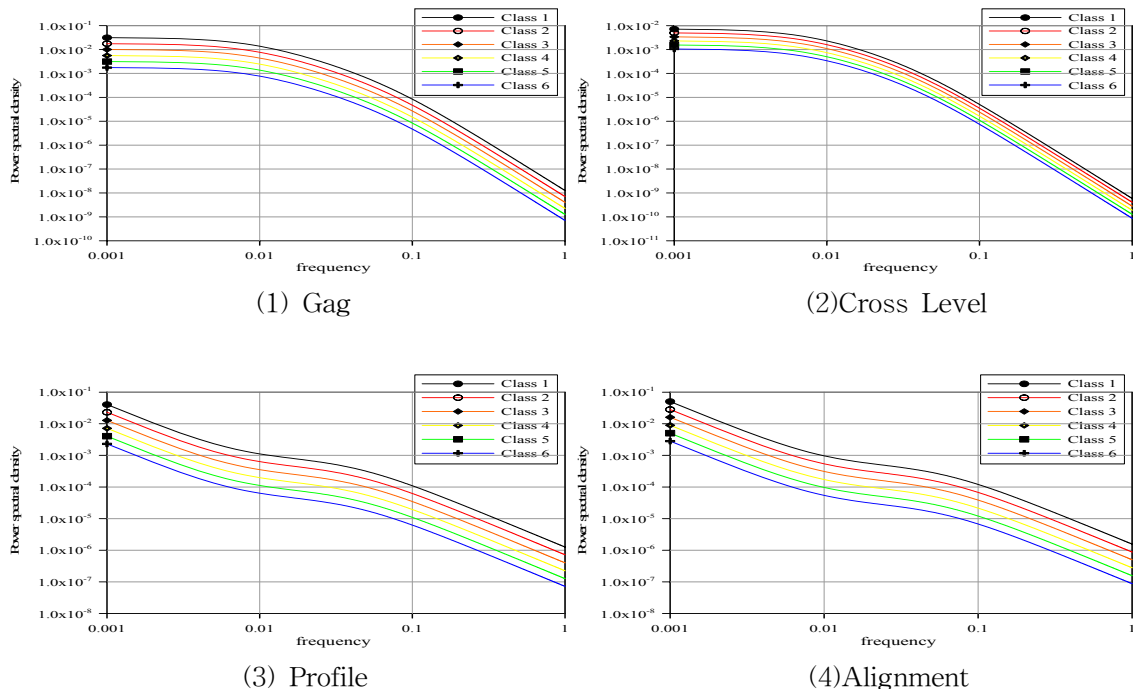
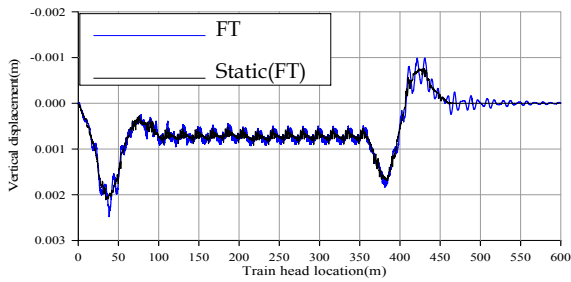


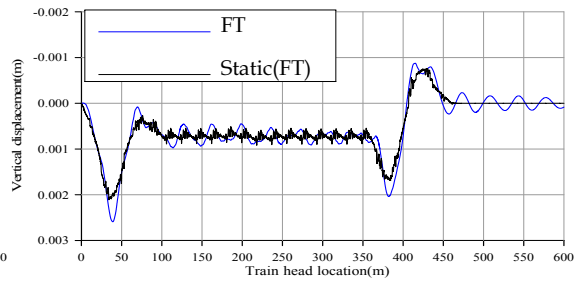
그림 1 PSD함수

### 3. 해석결과의 분석

동적해석의 검증을 위해서 연행 이동질량(CM)의 결과와 3D-KTX모델(FT) 두가지의 결과를 비교하며 1경간 중앙에서의 수직처짐에 대한 정적해석과 설계한계속도의 속도에 따르는 동적해석을 비교하여 속도가 낮아질수록 정적해석의 결과에 수렴하는지를 판단하여 프로그램의 동적해석의 결과가 적절한지 여부를 판단할 수 있다. 그림 2는 프로그램의 동적해석의 결과이다. 속도가 100km/h일때 정적해석의 결과와 상당히 유사하고 설계한계속도 350km/h일때를 비교해본 결과 프로그램의 동적해석 결과가 적절하다고 판단 할 수 있다.



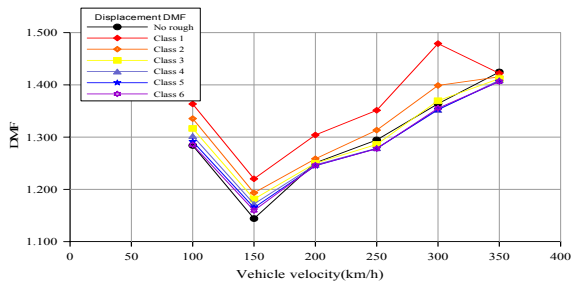
(1) v=100km/h



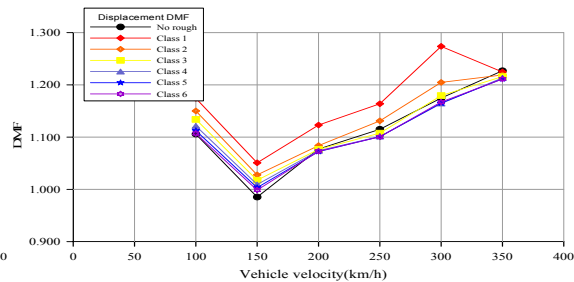
(2) v=350km/h

그림 2 정적해석결과값과 동적해석결과값의 비교

레일의 불규칙성이 가장 큰 FRA의 1등급 기준을 적용할 경우 전체적으로 상당히 큰 동적응답을 보여주었으며 일반적으로 교량의 경우 노면조도의 영향이 교량에 지배적으로 작용한다는 점과도 일맥상통하고 있다. 그림 3은 전체 노면 조도에 대한 충격계수의 크기를 차량의 속도별로 비교한 그림이며 그림 4의 (1)의 경우 CM(연행이동 질량)을 정적으로 이동시킨 결과에 대한 FT의 동적 해석에 대한 결과이고 그림 4의 (2)의 경우는 FT의 정적이동 응답에 대한 FT의 동적응답을 보여 준다. 동적해석과 정적해석의 경우 최대 1.42의 DMF(충격계수)가 시속 350km로 달리는 열차 모델에서 발생했으며 FT/FT의 경우 최대 1.22로 나타으므로 응답이 과소평가되는 경우가 발생하는 것으로 판단되며 교량열차 해석시 정밀한 3차원 모델의 해석이 중요함을 알 수 있다.



(1)FT(동적)/CM(정적)



(2)FT(동적)/FT(정적)

그림 3 레일의 불규칙성을 고려한 경우 해석방법에 따른 교량의 충격계수

#### 4. 결론

본 논문에서 새롭게 개발된 프로그램을 사용함으로써 기존의 질량모델보다 더 실제에 가까운 해석결과를 얻어낼 수 있을 뿐만 아니라, 모드형상을 이용하기 때문에 계산량이 획기적으로 줄게 된다. 따라서 시간당 40m의 두 개의 구간으로 구성된 본 논문에서 사용된 교량이 아닌 해석구간이 본 논문의 시간보다 긴 교량과 KTX의 상호작용 해석시에 해석시간을 획기적으로 줄여 줄 수 있을거라고 판단된다. 또한, 3D모델링을 함으로써 해석결과의 분석에서도 나타난것처럼 제대로 된 응답을 판단하여 응답이 과소평가되는 상황이 발생하지 않게 하는데 본 논문의 의의가 있다.

#### 참고문헌

김성일 (2000) “고속철도 교량의 교량-열차 상호작용해석” 서울대학교 대학원 박사학위 논문,  
 박홍석 (1998) “개선된 고속철도열차모형을 사용한 교량의 동적해석에 관한 연구” 연세대학교 대학원 박사학위논문  
 최성락 (2001) “고속철도 차량의 모형화기법에 따른 철도교량의 동적응답 분석” 연세대학교 대학원 석사학위논문  
 Willis, Stokes (1849) "Chaster Rail Bridge in England in 1847"  
 Wang, T. L., Huang, D., and Shahawy, M.(1992), "Dynamic Response of Multigirder Birdges", *Journal of Structural Engineering*, Vol.118, No.8, pp.2222~2238