2인자 혼합모형의 제약과 비제약 설계에 의한 게이지 R&R 연구의 고찰
Review of Gauge R&R Studies by Restricted and Unrestricted Design in the Two-Factor Mixed Model

최 성 운*
Sungwoon Choi*

Abstract

The paper reviews gauge R&R studies by two-factor mixed models including random and fixed factors. The two-factor mixed models include restricted models and unrestricted models considering the interaction of two factors. This study also classifies the models according to the number of factors, and the combination of various factors such as random factor, fixed factor, block factor and repetition type.

Keywords: Two-Factor Mixed Models, Restricted, Unrestricted, Random Factor, Fixed Factor, Block Factor, Repetition

* 경원대학교 산업공학과

1. 서 론

측정시스템분석(MSA : Measurement System Analysis)은 측정오차(Error)인 정확도(Accuracy)와 정밀도(Precision)를 좋게 유지하는 것이다. 오차를 작게하기 위해 우선 편의(Bias), 선형성(Linearity), 안정성(Stability) 등의 측정경영 관리의 시스템을 도입, 유지하여야 한다. 교정(Calibration)은 기준기(Reference)에 계측기를 소급(Traceability)하여 영점조정(Offset)하는 정확성을 추구하는 품질개선 활동이다. 이렇듯 정확도에 관련된 측정오차 개선활동을 측정시스템의 관리활동에 의해 가시적인 효과를 거둘 수 있는 반면에 정밀도는 측정데이터와 평균간의 산포(Dispersion)로 이에 대한 개선노력은 기술적, 전문적인 활동이 요구되며 Gauge R&R이라는 이름으로 연구되고 있다. 특히 Gauge R&R 연구에서는 설계, 분석, 평가의 편의성을 위해 실험계획법(ED : Experimental Design)의 ANOVA(Analysis of Variance) 모형을 응용하고 있다. 그러나 2인자 측정모형의 연구 중 대부분이 계측자, 부품 인자가 랜덤변량 모형인 2방 분할계획[1,3-6,8,10,12]에 집중되어 있다. 또한 2인자 혼합모형(Mixed Model)의 경우도 교호작용의 조건에서 고정모수 인자의 합 또는 평균이 제로를 가정하는 제약모형(Restricted and Constrained Model)에 국한되어 있다.[5,7,9,11]

따라서 본 연구에서는 실무자가 기본적으로 사용할 수 있는 1인자, 2인자 측정모형을 대상으로 반복수 일정 여부에 따른 균형(Balanced), 불균형(Unbalanced) 계획 방안을 제시한다. 또한 2인자 혼합모형의 경우 계측자, 부품의 측정요인이 모두 고정모수 인자인 모형과 1개의 측정요인이 랜덤확률 인자인 혼합모형, 날짜와 같은 측정조건의 블록 되풀이의 혼합모형 등에 대해 교호작용의 독립성을 고려한 비제약 설계(UUM : Unrestricted and Unconstrained Design) 방안을 고찰하고 요인별 측정 정밀도를 프로세스 단계[2]에 의해 응용한다.

2. 2인자 측정모형

2.1 1인자 모형

1단계는 실험목표의 설정으로 가벼운 중량의 상한규격(USL)을 설정하고 2단계는 망소특성의 측정데이터를 구한다. 3단계는 부품 A를 랜던변량 인자와 교차인자로 선정하고 4단계에서 수준의 수는 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$이다. 5단계에서 반복(Replication)수 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ r$이며 결측치가 있을 경우 반복수가 다른(Unbalanced) 1인자 모형을 사용하며 실험순서는 <표1>과 같다. 6단계의 측정데이터 구조모형은 $y_{ij}=\mu+a_i+e_{ij}$로 랜덤변량 인자인 경우 $\sum_i a_i \neq 0$ 또는 $\bar{a}\neq 0$이 되며 고정모수 인자인 경우 $\sum_i a_i = 0$ 또는 $\bar{a}=0$이 된다. 7단계의 요인별 SS, DF, MS는 <표2>와 같으며 <표3>의 EMS와 F_0 비는 8단계와 같다. 9단계의 요인별 측정정밀도 $\sigma_A^2=(MS_A-MS_E)/r$, $\sigma_E^2=MS_E$이고 $\sigma_{R\&R}^2=\sigma_E^2$, $\sigma_P^2=\sigma_A^2$,

$\sigma_T^2 = \sigma_E^2 + \sigma_A^2$이다. 10단계의 $SNR = 1.414\sigma_P / \sigma_{R\&R}$, $R\&RTR = \sigma_P / \sigma_T$, $PTR = 3\sigma_P / (USL - \mu)$이다.

<표1> 1인자 측정 실험 순서

A_1		A_2	
Repetition	Repetition	Repetition	Repetition

<표2> 1인자 측정모형 SS, DF, MS

측정 정밀도 요인	SS	DF	MS=SS/DF
A	$r\sum_i (\overline{y_i}. - \overline{\overline{y}})$	$l-1$	MS_A
E	$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \overline{y_i}.)^2$	$lr-l$	MS_E
T	$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \overline{\overline{y}})^2$	$lr-1$	

<표3> 1인자 모형의 EMS와 F_0 비

측정 정밀도 요인	EMS	F_0 비
A	$\sigma_E^2 + r\sigma_A^2$	MS_A / MS_E
E	σ_E^2	

2.2 2인자 모형

1단계에서 압축강도의 하한규격(LSL)을 실험목표로 설정하고 2단계에서 압축강도 계측기로 망대특성의 측정 실험 데이터를 구한다. 3단계에서 계측자 A, 부품 B는 고정모수 인자, 교차인자이며 4단계에서 A의 수준수 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$이고 B의 수준수 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$이다. 5단계에서 반복(Replication) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ r$이며 실험순서는 <표4>와 같다. 결측치가 있을 경우(Unbalanced) 해당 수준 칸(Cell)의 나머지 평균으로 대체한다. 6단계의 측정 데이터 구조모형 $y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + e_{ijk}$에서 $\sum_i a_i = 0$, $\sum_j b_j = 0$이다. 7단계의 SS, DF, MS는 <표5>와 같으며 <표6>의 EMS와 F_0 비는 8단계와 같다. 9단계의 요인별 추정 정밀도 $\sigma_A^2 = (MS_A - MS_E)/mr$, $\sigma_B^2 = (MS_B - MS_E)/lr$, $\sigma_{A\times B}^2 = (MS_{A\times B} - MS_E)/r$, $\sigma_E^2 = MS_E$이고 $\sigma_{R\&R}^2 = (\sigma_A^2 + \sigma_{A\times B}^2) + \sigma_E^2$, $\sigma_P^2 = \sigma_B^2$, $\sigma_T^2 = (\sigma_A^2 + \sigma_{A\times B}^2) + \sigma_E^2 + \sigma_B^2$이다. 10단계는 2.1절과 같으나 PTR의 분모가 $(\mu - LSL)$이

된다.

<표4> 2인자 고정모수 모형 실험순서

A_1B_1	A_1B_1
A_1B_2	A_1B_2
A_2B_1	A_2B_1
A_2B_2	A_2B_2

<표5> 2인자 측정모형 SS, DF, MS

측정 정밀도 요인	SS	DF	MS=SS/DF
A	$mr\sum_i(\overline{y_i}..-\overline{\overline{y}})^2$	$l-1$	MS_A
B	$lr\sum_j(\overline{y._j}.-\overline{\overline{y}})^2$	$m-1$	MS_B
A×B	$r\sum_i\sum_j(\overline{y_{ij}}.-\overline{y_i}..-\overline{y._j}.+\overline{\overline{y}})^2$	$lm-l-m+1$	$MS_{A\times B}$
E	$\sum_i\sum_j\sum_k(y_{ijk}-\overline{y_{ij}}.)^2$	$lmr-lm$	MS_E
T	$\sum_i\sum_j\sum_k(y_{ijk}-\overline{\overline{y}})^2$	$lmr-1$	

<표6> 고정모수 모형의 EMS와 F_0 비

요인	EMS	F_0 비
A	$\sigma_E^2+mr\sigma_A^2$	MS_A/MS_E
B	$\sigma_E^2+lr\sigma_B^2$	MS_B/MS_E
A×B	$\sigma_E^2+r\sigma_{A\times B}^2$	$MS_{A\times B}/MS_E$
E	σ_E^2	

3. A가 랜덤변량 인자인 경우 혼합 측정모형

3.1 제약 설계

2.2절과 다른 단계는 5단계의 실험순서가 <표7>과 같으며 6단계에서 A가 랜던변량 인자이므로 $\sum_i a_i \neq 0$이 된다. 8단계의 EMS와 F_0 비는 <표8>과 같으며 9단계에의 $\sigma_A^2 = (MS_A - MS_E)/mr$, $\sigma_B^2 = (MS_B - MS_{A\times B})/lr$, $\sigma_{A\times B}^2 = (MS_{A\times B} - MS_E)/r$, $\sigma_E^2 = MS_E$이다.

<표7> A가 랜덤변량 인자의 혼합모형

A_1				A_2			
B_1		B_2		B_1		B_2	
Repetition	Repetition	Repetition	Repetition	Repetition	Repetition	Repetition	Repetition

<표8> A가 랜덤변량 인자의 EMS와 F_0 비 : 제약 설계

측정 정밀도 요인	EMS	F_0 비
A	$\sigma_E^2 + mr\sigma_A^2$	MS_A/MS_E
B	$\sigma_E^2 + r\sigma_{A\times B}^2 + lr\sigma_B^2$	MS_B/MS_E
A×B	$\sigma_E^2 + r\sigma_{A\times B}^2$	$MS_{A\times B}/MS_E$
E	σ_E^2	

<표9> A가 랜덤변량 인자의 EMS와 F_0 비 : 비제약 설계

측정 정밀도 요인	EMS	F_0 비
A	$\sigma_E^2 + r\sigma_{A\times B}^2 + mr\sigma_A^2$	$MS_A/MS_{A\times B}$
B	$\sigma_E^2 + r\sigma_{A\times B}^2 + lr\sigma_B^2$	$MS_B/MS_{A\times B}$
A×B	$\sigma_E^2 + r\sigma_{A\times B}^2$	$MS_{A\times B}/MS_E$
E	σ_E^2	

3.2 비제약 설계

3.1절과 다른 단계는 8단계로 EMS와 F_0 비는 <표9>와 같으며 9단계의 $\sigma_A^2 = (MS_A - MS_{A\times B})/mr$, $\sigma_B^2 = (MS_B - MS_{A\times B})/lr$, $\sigma_{A\times B}^2 = (MS_{A\times B} - MS_E)/r$이다.

4. B가 랜덤변량 인자인 경우 혼합 측정모형

4.1 제약 설계

2.2절과 다른 단계는 5단계의 랜덤화 순서로 <표10>과 같다. 6단계에서 B가 랜덤변량 인자이므로 $\sum_j b_j \neq 0$이 된다. 8단계의 EMS와 F_0 비는 <표11>과 같으며 9단계의 추정 정밀도 $\sigma_A^2 = (MS_A - MS_{A\times B})/mr$, $\sigma_B^2 = (MS_B - MS_E)/lr$, $\sigma_{A\times B}^2 = (MS_{A\times B} - MS_E)/r$ 이다.

<표10> B가 랜덤변량 인자의 혼합모형

B_1				B_2			
A_1		A_2		A_1		A_2	
Repetition	Repetition	Repetition	Repetition	Repetition	Repetition	Repetition	Repetition

<표11> B가 랜덤변량 인자의 EMS와 F_0 : 제약 설계

측정 정밀도 요인	EMS	F_0 비
A	$\sigma_E^2 + r\sigma_{A\times B}^2 + mr\sigma_A^2$	$MS_A/MS_{A\times B}$
B	$\sigma_E^2 + lr\sigma_B^2$	MS_B/MS_E
A×B	$\sigma_E^2 + r\sigma_{A\times B}^2$	$MS_{A\times B}/MS_E$
E	σ_E^2	

4.2 비제약 설계

비제약 설계 모형은 A가 랜덤변량 인자의 EMS와 F_0 비가 <표9>와 같이 동일하다.

5. 블록되풀이 혼합 측정모형

2.2절에서는 다른 단계는 5단계에서 측정조건인 날짜 R($k=1,\ 2,\ \cdots,\ r$)의 블록되풀이(Repetition)가 인자로 처리된다는 것이다. 5단계의 실험순서는 <표12>와 같으며 6단계의 구조모형 $y_{ijk}=\mu+a_i+b_j+(ab)_{ij}+r_k+e_{ijk}$에서 모든 인자는 랜덤변량 인자, 교차인자이다. <표13>의 SS, DF, MS는 7단계와 같으며 EMS와 F_0 비는 <표14>와 같다. 여기서 σ_A^2, σ_B^2, $\sigma_{A\times B}^2$, σ_E^2은 2.2절과 같고 새로운 블록되풀이(Repetition) 인자 $\sigma_R^2=(MS_R-MS_E)/r$이다. 이 인자는 부품변동 σ_B^2와 합성되어 $\sigma_P^2=\sigma_B^2+\sigma_R^2$이다. 필요시 측정조건 정밀도는 분리평가가 가능하다.

<표12> 블럭되풀이 혼합모형의 실험순서

R_1		R_2	
A_1B_1	A_1B_1	A_1B_1	A_1B_1
A_1B_2	A_1B_2	A_1B_2	A_1B_2
A_2B_1	A_2B_1	A_2B_1	A_2B_1
A_2B_2	A_2B_2	A_2B_2	A_2B_2

<표13> 블록되풀이 혼합 측정모형 SS, DF, MS

측정 정밀도 요인	SS	DF	MS=SS/DF
A	$mr\sum_i(\overline{y_i}..-\overline{\overline{y}})^2$	$l-1$	MS_A
B	$lr\sum_j(\overline{y._j}.-\overline{\overline{y}})^2$	$m-1$	MS_B
A×B	$r\sum_i\sum_j(\overline{y_{ij}}.-\overline{y_i}..-\overline{y._j}.+\overline{\overline{y}})^2$	$lm-l-m+1$	$MS_{A\times B}$
R	$lm\sum_k(\overline{y.._k}-\overline{\overline{y}})^2$	$r-1$	MS_R
E	$\sum_i\sum_j\sum_k(y_{ijk}-\overline{y_{ij}}.)^2$	$lmr-lm$	MS_E
T	$\sum_i\sum_j\sum_k(y_{ijk}-\overline{\overline{y}})^2$	$lmr-1$	

<표14> 블록반복 모형 제약, 비제약 설계

측정 정밀도 요인	EMS	F_0 비
A	$\sigma_E^2 + mr\sigma_A^2$	MS_A / MS_E
B	$\sigma_E^2 + lr\sigma_B^2$	MS_B / MS_E
A×B	$\sigma_E^2 + r\sigma_{A \times B}^2$	$MS_{A \times B} / MS_E$
R	$\sigma_E^2 + lm\sigma_R^2$	MS_R / MS_E
E	σ_E^2	

6. 결 론

본 연구에서는 측정 실험계획법 모형 중 실무자에게 유용하게 사용되는 2인자 혼합모형에 대한 제약 설계와 비제약 설계의 차이점과 적용 단계를 모형별로 고찰하고 제안하였다. 1인자 모형에서는 부품의 교차 랜덤변량 인자의 반복(Replication)수가 같은 경우, 2인자 모형에서는 첫째 계측자 A, 부품 B가 교차 고정모수 인자의 반복(Replication)인 경우, 둘째 A가 랜덤변량 인자인 제약 설계와 비제약 설계의 혼합모형의 경우, 셋째 B가 랜덤변량 인자인 제약 설계와 비제약 설계의 혼합모형의 경우, 끝으로 2인자 모형에서 계측조건인 날짜, 교체 등의 되풀이(Repetition) 블록인 경우 등으로 유형화하여 고찰하고 요인별 정밀도를 추정하기 위한 단계별 프로세스를 제안하였다.

7. 참 고 문 헌

[1] 최성운, “GLM에서 제약과 비제약 혼합모형의 고찰 및 확장”, 대한안전경영과학회 춘계학술대회 발표논문집, (2009) : 185-192.

[2] 최성운, “측정 정밀도 추정을 위한 게이지 실험계획 프로세스 개발 및 적용”, 대한품질경영학회, 추계학술대회 발표논문집, (2009) : In Press.

[3] Burdick R.K., Borror C.M., Montgomery D.C., “A Review of Methods for Measurement Systems Capability Analysis", Journal of Quality Technology, 35 (4) (2003) : 342-354.

[4] Burdick R.K., Park Y.J., Montgomery D.C., “Confidence Intervals for Misclassification Rates in a Gauge R&R Study", Journal of Quality Technology, 37 (4) (2005) : 294-303.

[5] Burdick R.K., Borror C.M., Montgomery D.C., Design and Analysis of Gauge R&R Studies, SIAM, 2005.

[6] Chiang A.K.L., “A Simple General Method for Constructing Confidence Intervals for Functions of Variance Components", Technometrics, 43 (3) (2001) : 356-367.

[7] Daniels L., Burdick R.K., Quiroz J., Confidence Intervals in a Gauge R&R Study with Fixed Operators", Journal of Quality Technology, 37 (3) (2005) : 179-185.

[8] De Mast J., Trip A., “Gauge R&R Studies for Destructive Measurements", Journal

of Quality Technology, 37 (1) (2005) : 40−49.
[9] Dolezal K.K., Burdick R.K., Birch N.J., "Analysis of a Two−Factor R&R Stduy with Fixed Operators", Journal of Quality Technology, 30 (2) (1998) : 163−170.
[10] Pan J.N., "Determination of the Optimal Allocation of Parameters for Gauge Repeatability and Reproducibility Study", International Journal of Quality & Reliability Management, 21 (6) (2004) : 672−682.
[11] Van Den Heuvel E.R., "Gage R&R Studies for Nonstandard Situations", ASQ's Annual Quality Congress Proceedings, (2000) : 317−328.
[12] Vardeman S.B., Vanvalkenburg E.S., "Two−Way Random−Effects Analysis and Gauge R&R Studies", Technometrics, 41 (3) (1999) : 202−211.