

# 누적합 관리도의 이론적 전개에 관한 조사연구 Research Results and trends on CUSUM Control Chart

김 종 곁\*·엄 상 준\*\*·최 성 원\*\*

Jong-Gurl Kim\*·Sang-Joon Um\*\*·Sung-Won Choi\*\*

## Abstract

현대의 산업은 점차 분야가 다양해지고 기술이 첨단화되며, 고객의 요구사항이 복잡해지고 있다. 이에 따라 제조업에서는 초정밀, 고신뢰도가 요구되어지고 있는 실정이다.

제조업 분야의 핵심 기술인 SPC기법 중에서 누적합(CUSUM) 관리도는 공정의 작은 변화에 대해서 민감하다는 특징 때문에 첨단 산업인 반도체나 화학공정 등에서 활용도가 높은 관리도 기법이다. 하지만 복잡한 이론 체계로 인하여 사용편리성이 떨어진다는 단점이 있다. 본 논문에서는 누적합 관리도의 이론적 전개에 관한 체계적인 조사연구를 통해 누적합 관리도의 복잡한 이론 체계를 이해하는데 도움이 되고자 한다.

**Keywords:** SPC, CUSUM Control Chart, SPRT, 통계적 공정관리, 관리도

## 1. 서론

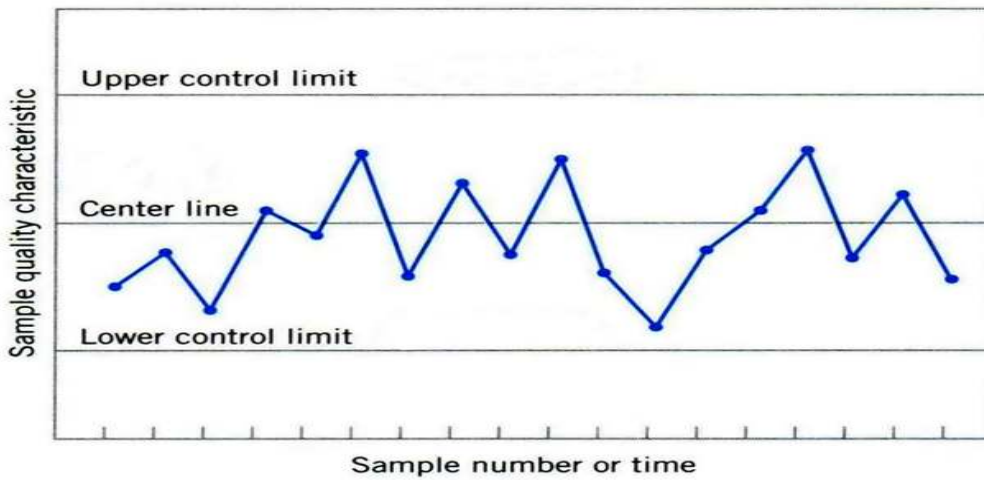
SPC는 제조공정단계에서 품질을 관리하는 통계적인 기법이다. SPC의 중요한 목적중 하나는 공정에 이상이 발생 하였을 때 이를 빨리 감지하여 적절한 조치를 취할 수 있도록 하는 것이다. 이러한 목적을 위하여 사용되는 대표적인 SPC 기법 중 하나가 바로 관리도(Control Chart) 이다.

관리도란 관리 상태에서 품질특성치의 목표값을 나타내는 중심선(center line)과 중심선 상하에 한 쌍의 관리한계선(control limit) 그리고 관리하고자 하는 공정의 상태를 그래프로 나타낸 것을 말하며, 이것을 사용하는 방법을 관리도법(control chart methods)이라 한다. 아래의 [그림 1-1]은 관리도의 일반적인 형태이다.

---

\* 성균관대학교 시스템경영공학과

\*\* 성균관대학교 산업공학과



[그림 1-1] 일반적인 슈와트(Shewhart)관리도

슈와트 관리도는 1924년에 Bell 전화연구소의 Shewhart W. A.에 의하여 처음으로 소개되었다. 슈와트 관리도는 사용하기 쉽고 간단하면서도 공정이상을 감지하는 능력이 뛰어나다는 장점이 때문에 수십년이 지난 지금 까지도 사용되고 있다. 기존의 산업에서는 슈와트 관리도만으로도 고객의 요구사항을 충족시킬 만큼 충분한 관리능력을 지니고 있었다. 하지만 현대의 산업은 그 분야가 점점 다양해지며 첨단화되고 있다. 또한 그에 따라 고객의 요구사항은 점점 더 복잡해지고 있으며 까다로워지고 있다. 특히 반도체분야를 비롯하여 화학공정과 초정밀가공 등의 신뢰성확보를 핵심목표로 하는 분야에서 극소불량에 대한 공정관리기술 확보의 시급성이 높아지고 있고, 극소불량 관리에 대한 관리도 기법이 매우 중요한 연구 분야가 되었다. 예를 들어 화학 또는 의약품산업에서 제조공정의 경우 공정의 미세한 변화가 제품에 큰 영향을 줄 수 있으며 기존의 슈와트 관리도를 통해서 공정관리를 할 경우 기존의 샘플링 방법으로는 공정의 변화를 정확히 모니터링 할 수 없다. 또 그러한 샘플링 정보로는 공정의 미세한 변화를 찾아내기 힘들다.

이러한 문제점에 대하여 여러 가지 해결책이 제시되고 있고, 누적합 관리도는 그러한 해결책 중 하나이다.

누적합 관리도는 최소한의 샘플링정보를 가지고 공정의 미세한 변화를 훌륭하게 찾아내는 장점이 있다.[36] 하지만 지금까지는 다소 접근하기 어려운 이론체계와 복잡한 계산 절차로 인하여 논문으로만 연구되어지고 있었고 실제적인 산업에서는 활용되지 못하였다.

본 논문에서는 누적합 관리도의 연구동향을 살펴보고, 누적합 관리도의 이론체계를 정리함으로써, 향후 심도 있게 추진되어야 할 연구 분야를 제시하고, 누적합 관리도의 활용방안에 대한 연구 방향성을 제시하여 국내의 공정관리 분야의 수준을 끌어올리는데 기여하고자 한다.

## 2. 누적합 관리도에 대한 유관논문 조사 방법

## 2.1 유관연구논문의 조사

누적합 관리도의 이론 체계를 정리하고자 NDSL을 포함한 총 9곳(Science Direct, IEEE Xplore, Emerald, Springer Link, DBPIA, Informaworld, ACM Digital Library, Wiley Inter Science, ASQ)의 논문검색 Web-Site에서 해외 유관 논문을 수집하였다.

이론 체계를 정리하고 자하는 작업이므로 최초 1950년대의 논문부터 현재까지의 논문을 고루 조사 하였고, 중복이 되는 연구주제는 배제하였다.

## 3. 누적합 관리도

### 3.1 누적합 관리도의 고찰

누적합 관리도는 측정한 품질 특성치 결과를 누적하여 산출한 값을 통해 공정의 변화를 판단하는 방법으로, 비교적 빠르게 공정의 변화를 탐지할 수 있다. 슈와트 관리도 보다 두 배정도 빨리 이동 상태를 감지한다. 즉, 공정이 관리상태일 때, 누적합 관리도는 목표 값으로부터 작은 변화를 잘 감지해낸다. 왜냐하면, 연속된 샘플데이터 값으로부터 정보를 종합하기 때문이다. 누적합 관리도에서의 타점은 목표값으로부터 샘플 값을 뺀 차이의 누적 합으로써 이 점들은 0주위에 랜덤하게 분포되어 있어야 한다. 만일 타점의 추이가 위 또는 아래로 발견되었다면, 이는 프로세스의 평균에 변동이 있음을 뜻하고 이상요인을 찾아봐야 한다는 경고이다.

누적합 관리도는 Wald(1947)의 축차확률 비율검정 이론을 기초로 하여 정립된 것으로 Page(1954)에 이르러 비로소 누적합 관리도의 이론이 구체화 되었다.[12] 그는 품질 특성의 분포에 있어서 모수의 변화를 검출하는 문제와 관측치를 이용하고자하는 규칙을 개발하기 위하여 평균런의 길이(ARL)를 이용하였다. 또한 공정변화의 검출 방법으로 단측 또는 양측으로 모수의 변동을 검출하고자 하였다.

누적합 관리도는 샘플크기가  $n \geq 1$  일 때, 몇 개의 샘플정보를 합하였기 때문에 슈와트 관리도 보다 공정이동이 작은 탐지를 위하여 효과적이며, 더구나 샘플의 크기가  $n = 1$  일 때 실무에서 효과적이다. 누적합 관리도에서 타점은 다음 식과 같다.

$$C_t^+ + \sum_{j=1}^t (\bar{Y} - \mu_0)$$

Tabular 누적합 관리도의 단측 통계적 상한값과 하한값은 다음과 같다.

$$C_t = \max [0, x_t - (\mu_0 + k) + C_{t-1}^+]$$

$$C_t^- = \max [0, (\mu_0 - k) - x_t + C_{t-1}^-]$$

여기서 초기값은  $C_0^+ = C_0^- = 0$  이다.

$k$ 는 참고값이라고도 하며 평균  $\mu_1$ 에서 가피원인의 값과 목표값  $\mu_0$ 와 차의 절대 값을 반으로 나눈 값이다.

$C_i^+$ 와  $C_i^-$ 의 상한과 하한의 의사결정 간격  $H$ 는 부분군의 크기가  $n = 1$ 이며,  $\sigma = 1$  일 때 5를 권장한다.

누적합 관리도는 품질특성의 누적합이 의사결정간격  $H$ 를 벗어날 경우 그 이유를 찾아서 교정해야 하며, 누적합의 초기값을 0으로 한다.

Tabular 누적합 관리도는  $H = h\sigma$ ,  $K = k\sigma$ 를 정의해야 하는데  $H = 4$ , 또는  $H = 5$ ,  $k = \frac{1}{2}$ 을 추천한다.

### 3.2 누적합 관리도의 연구영역

본 논문에서는 누적합 관리도의 논문 중 대표적인 논문 40 여편을 조사하여 누적합 관리도의 연구영역을 6가지로 분류 하여 조사하였다. 6가지 연구 영역은 다음과 같다.

1. 누적합 관리도의 이론적 배경
2. 누적합 관리도의 평가방법
3. 누적합 관리도의 변형에 관한 연구
4. 누적합 관리도를 설계하기 위한 접근방법의 연구
5. 누적합 관리도의 실행을 위한 컴퓨터 프로그램 연구
6. 다변량 누적합 관리도에 대한 연구

본 논문에서는 위의 각 영역의 대표적인 논문들을 조사하여 주요내용을 소개하였다.

## 4. 누적합 관리도의 연구동향

### 4.1 누적합 관리도의 이론적 배경

누적합 관리도의 기원은 1954년으로 거슬러 올라간다. 1954년 Page는 Wald의 축차적 확률비 검정(Sequential Probability Ratio Test)의 아이디어를 기초로 누적합 관리도의 개념을 정립 하였다[12][17][29]. 또한 누적합관리도는 여러 가지 분포의 모수를 다루고 있으나, 주로 정규분포이거나 지수분포일 경우를 전제하고 연구되어 왔다. 누적합 관리도의 관리모수는 주로 평균과 분산, 실패비율(Failure rate) 등이 있으며 분포변환을 이용한 누적합 관리도 분야 또한 지속적으로 연구되어왔다. 조사한 논문에서 누적합 관리

도를 개량하고 평가하기 위해 사용한 기준이나 척도는 활용성(Utilization), 능률/효율성(Efficiency), 강건성(Robustness), 적응/조화성(Adaptivity) 등이 있다[28].

#### 4.2 누적합 관리도의 평가 방법

누적합 관리도의 유효성을 평가하기 위한 방법론은 3가지로 구분 할 수 있다. 첫 번째 방법은 측차적확률비검정의 원리를 통해 적분 방정식(Integral Equation)을 이용한 방법이고, 두 번째 방법은 Markov Chain을 이용한 방법이고, 세 번째는 컴퓨터 프로그램을 사용한 시뮬레이션 방법이 있다.

#### 4.3 누적합 관리도의 변형에 관한 연구

누적합 관리도의 변형에 관한 논문들도 여러 편이 조사되었다. 누적합 관리도 변형의 이유는 3가지로 정도로 생각해볼 수 가 있다. 첫째는 관리도의 민감도나 효율의 개선에 관한 연구, 둘째는 이상치(Outliers)에 대한 강건성을 높이는 방법에 관한 연구, 셋째는 정규분포가 아닌 다른 분포 특성을 가지는 특성치에 대해서 활용하기 위한 관리도 확장에 관한 연구이다.

Westgard(1977)은 민감도와 효율을 개선하기 위해 관리도의 결함방안에 대해서 연구 하였고[38], Lucas(1973)는 V-mask의 변형 방법에 대해서 연구하였고[21], Lucas & Crosier(1982)는 Fir-CUSUM을 이용하는 방법을 연구 하였다[23].

Lucas(1985)는 이상치(Outliers)에 대한 강건성을 높이기 위해 강건화(Robustification) 누적합 관리도에 대한 연구를 하였고[22], Rocke(1989)는 Trimmed 누적합 관리도에 대한 연구를 하였다[8].

Munford(1980)는 Cuscore, Combined Cuscore에 대한 연구를 하였고[2], Lucas(1985)는 Counted 누적합 관리도를 통해 정규분포가 아닌 다른 분포특성을 가지는 변수에 대한 누적합 관리도 활용 방안에 대한 연구를 하였다[22].

아래의 [표 4-1]은 누적합 관리도의 변형에 관한 연구 영역에 대하여 설명한 것이다.

[표 4-1] 누적합 관리도의 변형에 관한 연구 영역[2][6][7][8][23][27][33][34][38]

연구분야	방법론	연구자(년도)	비고
Improvement of sensitivity/efficiency	Combined charts	Westgard et al. (1977)	
	Modified V-mask	Lucas(1973,1976)	
	Fir-CUSUM	Lucas & Crosier(1982), Kenett & Pollack(1983)	
Robustification against outliers	Robust CUSUM	Lucas(1985), Rocke(1982,1983)	
	Trimmed CUSUM	Rocke(1989)	
Utilization for implementation	Cuscore, Combined Cuscore	Munford(1980), Woodal & Ncube(1984)	
Extension to other distribution	Counted CUSUM	Lucas(1985)	

#### 4.4 누적합 관리도를 설계하기 위한 접근방법의 연구

누적합 관리도를 설계하기 위해 두 가지 측면의 방법론이 연구되어 지고 있다. 첫 번째로는 통계적인 설계(Statistical Design)와 두 번째로는 경제적 설계(Economic Design)이다.

통계적인 설계에 대한 접근은 런 길이(Run Length)[35]를 구하는 방법으로 진행된다.

Goel & Wu(1971)는 축차확률비검정(SPRT)를 사용하여 런 길이를 구하는 방법에 대해서 연구하였고[4], Brook & Evans(1972)는 마코브 체인(Markov Chain)을 사용한 방법에 대한 연구를 하였다[9]. Test의 Type에 따른 연구 방법에는 Ewam & Kemp(1960)가 단측(One-sided) 누적합 관리도의 run length에 관한 연구를[37], Lucas & Crosier(1982)가 양측(Two-sided) 누적합 관리도의 런 길이에 관한 연구를 하였다[31]. 변수의 분포특성에 따른 연구는 Page(1954)가 정규분포(normal distribution)의 런 길이에 관한 연구를 하였다[12], Lorden & Eisenberger(1973), Vardeman & Ray(1985)는 지수분포(exponential distribution)의 런 길이에 관한 연구를 하였다[19].

경제적인 설계(economic design)의 연구영역은 샘플링(sampling) 방법[10][13][18][24][26][30], 매개변수의 특성, 실패 매커니즘(failure mechanism)[19], 요인의 개수, 분포의 형태[41], 관리하고자 하는 매개변수의 유형[20], 최적화 하고자하는 척도, 매개변수의 정확도, 환경적 요인으로 9가지가 있으며 Duncan(1956)은  $\bar{X}$  관리도의 경제적 설계에 대하여 연구하였고[1], 이를 발전 시켜 Goel & Wu(1968,1973)은 누적합 관리도의 경제적 설계에 대한 절차를 연구 하였다[3][5]. Taylor(1968) 또한 이 분야의 연구업적을 남겼다[25].

#### 4.5 누적합 관리도의 실행을 위한 컴퓨터 프로그램 연구

누적합 관리도를 원활히 사용하기 위한 컴퓨터 프로그램에 관한 연구도 꾸준히 이루어 지고 있다. 컴퓨터 프로그램 개발을 위한 논문은 Yashchin(1984,1985)와 F. C. Leone(1962)에 의하여 연구되었다[11][14][15][16][42].

#### 4.6 다변량(multivariate) 누적합 관리도에 대한 연구

다변량 누적합 관리도에 대한 연구 또한 지속적으로 진행 되어왔다. Woodal & Ncube(1985)는  $T^2$  누적합 관리도 분야에 대한 연구를 하였고[40], Crosier(1986,1988)는 Vector of 누적합 관리도 분야에 대한 연구를 하였다[31][32].

### 5. 결론

E. S. Page의 1954년 ‘Cumulative Sum Charts’ 논문으로 누적합 관리도가 발표된 이

래로 현재까지 꾸준한 연구가 이루어지고 있다. 누적합 관리도의 특성을 생각했을 때 앞으로 다가올 미래의 제조 산업에 일반적인 슈와트 관리도를 대신하여 공정관리의 혁신에 큰 영향을 미치리라 생각한다. 하지만 다소 접근하기 어려운 이론 체계와 복잡한 설계 절차로 인하여 쉽고 간단한 슈와트 관리도를 대신하기가 현재로서는 힘들어 보인다.

본 논문에서는 누적합 관리도의 이론적 전개에 관하여 연구하였다. 누적합 관리도의 연구 영역은 관리도의 변형이나 결합을 통해서 민감도, 효율성, 강건성을 높이는 방법론이나 단변량 정규분포뿐만 아니라 단변량 지수분포, 그 외의 확률분포 그리고 다변량 누적합 관리도에 관한 논문이 주를 이루었으며, 누적합 관리도를 간단히 활용할 수 있는 방법론에 대해서는 그 연구가 미비하였다. 또한 앞으로의 제조 산업에서 주를 이루게 될 고정밀, 고신뢰성 제조 산업에 대비한 비정규분포의 누적합 관리도에 대한 연구도 그 영역이 미비하였다.

그리하여 본 논문에서는 누적합 관리도의 간단한 활용방안에 대한 연구영역과 비정규분포의 누적합 관리도 활용방안에 대한 연구의 필요성을 제시하고자 한다.

## 6. 참 고 문 헌

- [1] A. J. Duncan, "The Economic Design of barX Charts used to maintain current control of a process", *Journal of the American Statistical Association*, v.51 no.274, 1956, pp.228-242
- [2] A. G. Munford, "A Control Chart Based on Cumulative Scores", *Journal of the Royal Statistical Society*, v.29 no.3, 1980, pp.252-258
- [3] A. L. Goel, S. C. Jain, S. M. Wu, "An Algorithm for the Determination of the Economic Design of X-Charts Based on Duncan's Model", *Journal of the American Statistical Association*, v.63 no.321, 1968, pp.304-320
- [4] A. L. Goel, S. M. Wu, "Determination of A.R.L and a Contour Nomogram for Cusum Charts to Control Normal Mean", *Technometrics*, v.13 no.2, 1971, pp.221-230
- [5] A. L. Goel, S. M. Wu, "Economically Optimum Design of CUSUM Charts", *Management Science*, v.19 no.11, 1973, pp.1271-1281
- [6] D. M. Rocke, "Robust Statistical Analysis of Interlaboratory Studies", *Biometrika*, v.70 no.2, 1983, pp.421-431
- [7] D. M. Rocke, "Robust Control Charts", *Technometrics*, v.31 no.2, 1989, pp.173-184
- [8] D. M. Rocke, G. W. Downs, A. J. Rocke, "Are Robust Estimators Really Necessary?", *American Statistical Association and American Society for Quality*, v.24 no.2, 1982, pp.82-101
- [9] D. Brook, D. A. Evans, "An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length", *Biometrika*, v.59 no.3, 1972, pp.539-549
- [10] D. W. Beattie, "A Continuous Acceptance Sampling Procedure Based Upon a Cumulative

- Sum Chart for the Number of Defectives”, Journal of the American Statistical Association, v.11 no.3, 1962, pp.137-147
- [11] Emmanuel Yashchin, “On a Unified Approach to the Analysis of Two-sided Cumulative Sum Control Schemes with Headstarts”, Advances in Applied Probability, v.17 no.3, 1985, pp.562-593
- [12] E. S. page, “Cumulative Sum Charts”, Technometrics, v.3 no.1, 1961, pp.562-593
- [13] N. L. Johnson, “Estimation of Sample Size”, Technometrics, v.4 no.1, 1962, pp.1-9
- [14] F. C. Leone, “Statistical Programs for High Speed Computers-1”, Technometrics, v.4 no.1, 1962, pp.145-149
- [15] F. C. Leone, “Statistical Programs for High Speed Computers-2”, Technometrics, v.4 no.2, 1962, pp.289-292
- [16] F. C. Leone, “Statistical Programs for High Speed Computers-3”, Technometrics, v.4 no.3, 1962, pp.433-435
- [17] G. A. Barnard, “Studies in the History of Probability and Statistics”, Biometrika, v.45 no.3, 1958, pp.293-315
- [18] G. B. Wetherill, W. K. Chiu, “A Simplified Attribute Sampling Scheme”, Journal of the Royal Statistical Society, v.23 no.2, 1974, pp.143-148
- [19] G. Lorden, I. Eisenberger, “Detection of Failure Rate Increases”, Technometrics, v.15 no.1, 1973, pp.167-175
- [20] I. N. Gibra, “Economically Optimal Determination of the Parameters of X-control chart”, Management Science, v.17 no.9, 1971, pp.635-646
- [21] J. M. Lucas, “A Modified "V" Mask Control Scheme”, Technometrics, v.15 no.4, 1973, pp.833-847
- [22] J. M. Lucas, “Counted Data CUSUM's”, American Statistical Association and American Society for Quality, v.27 no.2, 1985, pp.129-144
- [23] J. M. Lucas, R. B. Crosier, “Fast Initial Response for CUSUM Quality-Control Schemes: Give your CUSUM a Head Start”, Technometrics, v.24 no.3, 1982, pp.199-205
- [24] K. W. Kemp, “The Use of Cumulative Sums for Sampling Inspection Schemes”, Journal of the Royal Statistical Society, v.11 no.1, 1962, pp.16-31
- [25] L. D. Taylor, “The Economic Design of Cumulative Sum Control Charts”, Technometrics, v.10 no.3, 1968, pp.479-488
- [26] N. L. Johnson, “Estimation of Sample Size”, Technometrics, v.4 no.1, 1962, pp.59-67
- [27] M. M. Ncube, W. H. Woodall, “A Combined Shewhart-Cumulative Score Quality Control Chart”, Journal of the Royal Statistical Society, v.33 no.3, 1984, pp.259-265
- [28] N. L. Johnson, “A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Charts”, Journal of the American Statistical Association, v.56 no.296, 1961, pp.835-840



- [29] N. L. Johnson, "Sequential Analysis: A Survey", *Journal of the Royal Statistical Society*, v.124 no.3, 1961, pp.372-411
- [30] R. A. Johnson, M. Bagshaw, "The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Tests", *Technometrics*, v.16 no.1, 1974, pp.103-112
- [31] R. B. Crosier, "A new two-sided Cumulative Sum Quality Control Scheme", *Technometrics*, v.28 no.3, 1986, pp.187-194
- [32] R. B. Crosier, "Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-control schemes", *Technometrics*, v.30 no.3, 1988, pp.291-303
- [33] R. Kenett, M. Pollak, "On Sequential Detection of a Shift in the Probability of a Rare Event", *Journal of the American Statistical Association*, v.78 no.382, 1983, pp.389-395
- [34] S. M. Stigler, "Do Robust Estimators Work with Real Data?", *Institute of Mathematical Statistics*, v.5 no.6, 1977, pp.1055-1098
- [35] S. Vardeman, Di-ou Ray, "Average Run Lengths for CUSUM Schemes When Observations are Exponentially Distributed", *Technometrics*, v.27 no.2, 1985, pp.145-150
- [36] W. D. Ewan, "When and How to Use Cu-Sum Charts", *Technometrics*, v.5 no.1, 1963, pp.1-22
- [37] W. D. Ewan, K. W. Kemp, "Sampling Inspection of Continuous Processes with No autocorrelation Between Successive Results", *Biometrika*, v.47 no.3, 1960, pp.363-380
- [38] Westgard et al., "Combined Shewhart-cusum control chart for improved quality control in clinical chemistry", *Clinical chemistry*, v.23 no.10, 1977, pp.1881-1887
- [39] W. H. Fellner, "Robust Estimation of Variance Components", *Technometrics*, v.28 no.1, 1986, pp.51-60
- [40] W. H. Woodall, M. M. Ncube, "Multivariate CUSUM Quality-Control Procedures", *Technometrics*, v.27 no.3, 1985, pp.285-292
- [41] W. K. Chiu, "The Economic Design of CUSUM Charts for Controlling Normal Means", *Journal of the Royal Statistical Society*, v.23 no.3, 1974, pp.420-433
- [42] Yashchin, "On The Analysis and Design of Cusum-Shewhart Control Schemes", *IBM journal of research and development*, v.29 no.4, 1985, pp.377-391