Proper Orthogonal Decomposition을 이용한 공력축소모델 연구

A Study on Aerodynamic Reduced Order Model Using Proper Orthogonal Decomposition

전 상 욱* • 박 경 현** • 강 승 온*** • 이 동 호****

Jun, Sang-Ook • Park, Kyung-Hyun • Kang, Seung-On • Lee, Dong-Ho

요 약

본 연구에서는 Proper Orthogonal Decomposition (POD)를 이용하여 공력축소모델을 구축하였다. 일반적으로 Euler equations과 같은 높은 정확도를 가지는 공력해석을 수행할 경우 많은 계산 비용이 발생하게 된다. 특히 공탄성 해석과 같이 수차례의 공력해석이 필요한 경우 그 비용은 더 증가하게 된다. 이러한 문제를 줄이기 위해서 축소모델(Reduced Order Model; ROM)의 개발은 반드시 필요하다. 공력축소모델을 구하는 방법 중 하나인 POD는 snapshot 데이터로부터 기저벡터를 구하고, 이들의 선형결합을 통하여 축소된 공간에서 해를 찾는 방법이다. 본 연구에서는 POD 기저벡터를 이용한 공력축소모델을 구축하고, 이를 전투기 날개문제에 적용하여 구하여진 정상상태 해와 Euler 해석 결과를 비교해 보았다. 또한 진동하는 익형 문제에 적용하여 봄으로써 공탄성 해석에 적용 가능성 여부를 확인하였다.

keywords : Proper Orthogonal Decomposition(POD), wing, airfoil

1. 서 론

공탄성을 비롯한 공기역학분야의 가장 큰 이슈 중 하나는 수치해석의 방대한 계산 시간과 비용을 어떻게 줄이는가 하는 것이다. 이를 위하여 격자적응기법, 수렴가속화 기법 등의 다양한 수치해석기법들이 연구되었다. 그러나 최근에는 이러한 기법들 보다 Proper Orthogonal Decomposition (POD)와 같은 축소모델(Reduced Order Model; ROM)에 대한 연구가 더 활발하게 진행되고 있다. (Lucia et al, 2004; 강승온 등, 2009 submit)

POD는 계산 격자의 증가로 인한 많은 수의 자유도를 줄임으로써 계산 효율을 향상시키는 기법이다. Euler 방정식이나 Navier-Stokes 방정식을 푸는 해석 도구의 몇몇 결과로부터 특이치 분해(Singular Value Decomposition; SVD)를 수행하셩 전체 시스템(full system)의 자유도를 줄인다. 즉 POD를 통해 실험적인 데이터나 해석결과들로부터 유동장의 가장 지배적인 특징과 경향을 나타내는 타당한 기저벡터의 집합을 찾고, 이 기저벡터로 저차원 부분공간을 찾을 수 있으며, 저차원 부분공간 상에서 고차원공간으로 지배방정식의 투사에 의해 우리가 원하는 결과를 빨리 구할 수 있다. (Lucia, 2001; Holmes, 1996)

본 연구에서는 POD 기저벡터를 이용하여 Euler 코드의 공력축소모델을 구축하였다. 정상상태의 결과를

* 서울대학교 기계항공공학부 박사과정 ellga5@snu.ac.kr
** 서울대학교 기계항공공학부 석사과정 pkh365@snu.ac.kr
*** 서울대학교 기계항공공학부 박사과정 kso1@snu.ac.kr
**** 서울대학교 기계항공공학부 교수 donghlee@snu.ac.kr

검증하기 위하여 전투기 날개 문제에 구축된 축소모델을 적용하여 보았으며 실제 full system의 해석결과와 비교하여 보았다. 또한 진동하는 익형 문제에 대해서 축소모델을 적용하여 봄으로써 차후 공탄성 해석에 적합한지 여부를 확인하였다.

2. 지배방정식 및 Proper Orthogonal Decomposition

3차원 유동문제를 해석하기 위해서는 이상기체(ideal gas)에 대한 질량, 모멘트 및 에너지 보존법칙으로부터 Euler 방정식을 적분형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} Q \; dV + \int_{\partial\Omega} F(Q)\cdot\vec{n} \; dS = 0 \tag{1}$$

여기서 V는 제어체적을 나타내고 S는 제어표면, $\vec{n}$ 은 제어표면 바깥 방향의 법선 벡터를 나타낸다. 보다 자세한 사항은 다음의 참고문헌에 기술되어 있다. (Ashford, 1996; Anderson, 1994; 김병곤 등, 2007; 최동수 등, 2007; 전상욱 등 2009)

POD는 snapshot으로부터 작은 수의 자유도를 가지는 기저를 추출하여 전체 시스템의 거동을 적절하게 모사할 수 있는 기법이다. POD modes는 불안정성을 초래하는 고주파 영역을 포함하고 있지 않기 때문에 시간 간격을 개선할 수 있다. 단순하게 하나의 유동변수, $w(t)$만을 고려하자. $w(t)$는 N개의 노드에 대하여 공간 차분되었으며 오일러 방정식에서의 밀도(ρ), 속도장(u, v, w), 에너지(e)에 해당한다. 이런 유동변수에 대하여 full system dynamics을 표현하면 식 (2)과 같이 nonlinear operator, R을 이용하여 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\,\underline{w}}{dt} = R(\underline{w}) \tag{2}$$

POD는 전체시스템의 해, $\underline{w}$와 축소 시스템의 해, $\underline{\hat{w}}$사이의 선형변환 Ψ를 도입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

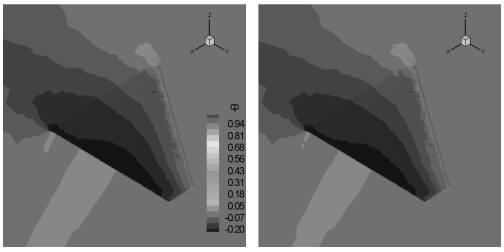
$$\underline{w}(t) = \underline{W}_0 + \Psi\,\underline{\hat{w}}(t) \tag{3}$$

여기서 Ψ는 시간에 따라 변하지 않지만, $\underline{w}$와 $\underline{\hat{w}}$는 시간에 대한 함수이다. Ψ는 full system dynamics의 시간적분 전체에서 다른 시간 간격일 때 관측된 해, $\underline{w}(t) - \underline{W}_0$을 수집함으로써 결정되며, snapshot 행렬 (S)과 S^TS의 고유벡터로 계산된다. 자세한 내용은 참고문헌 Lucia (2001), 전상욱 (2009)에 나타나 있다.

3. 해석결과의 분석

3.1 전투기 날개 예제

사면체의 비정렬 격자를 이용하여 마하수 1.5, 받음각 2, 6, 10도 일 때 full system 해석을 수행하였고, 이들 3개의 데이타를 snapshot으로 선정하였다.



(a) full system (b) reduced system

그림 1. full system과 reduced system의 결과 비교 (압력 계수 분포, 받음각 4도, 마하수 1.5)

이들 snapshot을 가지고 앞 절에서 설명한 S^TS 행렬을 구성, 특이치 분해를 수행하여 마하수 1.5, 받음각 2-10도 일 때의 유동장을 예측할 수 있도록 기저벡터를 구하였다. 이와 같이 구성된 축소 모델의 검증을 위하여 마하수 1.5, 받음각 4도일 때 full system 해석의 결과(그림 1. a)와 reduced system 해석 결과(그림 1. b)를 비교하였다. 전체 영역에 대한 평균 오차는 0.0058로 축소모델이 full system을 대체로 잘 모사하고 있음을 확인하였다. 또한 표 1에 정리한 바와 같이 양력계수와 항력계수의 값들이 5% 내외의 오차를 보이고 있는 것을 확인할 수 있었다.

표 1. 양력계수 및 항력계수의 비교

	full system	reduced system	error (%)
C_L	0.1795	0.1902	5.98
C_D	0.0271	0.0280	3.34

full system의 계산시간은 CPU Pentium D 3.2 GHz, RAM 2GB의 pc에서 약 4시간정도 소요되는데 반해 reduced system은 snapshot이 존재한다고 하였을 때 해석 시간은 10여분이 소모된다.

3.2 진동하는 익형 예제

공력하중을 구하기 위하여 그림 2와 같은 모델을 설정한 후 해석을 수행하였으며 오일러 코드를 사용하였기 때문에 점성항의 영향을 크게 받는 C_d는 제외하고 C_l과 C_m만을 고려하였다. 받음각을 sinusoidal 형태로 기수올림과 기수내림의 변화를 주어 진동하는 NACA0012의 aerodynamic center에서의 C_l값과 C_m값을 계산하였다. 이와 같은 sinusoidal 형태의 입력 값은 헬리콥터 로터 블레이드와 같이 피치값이 일정한 주기를 가지고 변화하는 곳에 응용될 수 있다.

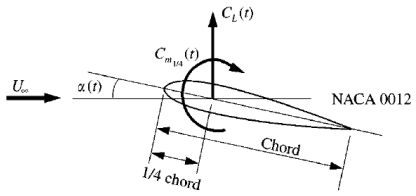


그림 2. 비정상 공력하중 계산을 위한 모델

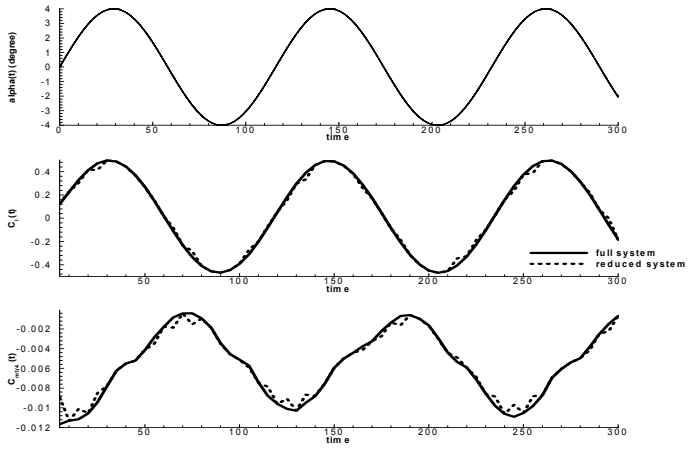


그림 3. M=0.526, k=0.039인 경우 C_l과 C_m의 예측결과

마하수는 0.475, k(reduced frequency, $\omega/2M_\infty$)값은 0.057에서 비정상 해석을 수행하였다. 총 41개의 snapshot을 추출하였으며 그 결과는 다음 그림 3과 같다. reduced system의 예측값이 full system의 값에 비하여 평균 5%의 오차를 보이고 있음을 확인하였다.

full system의 계산시간은 앞의 예제와 같은 pc에서 약 24시간 이상 소요되는데 반해 reduced system은 snapshot이 존재한다고 하였을 때 해석 시간은 역시 10여분 정도 필요하다.

4. 결론 및 향후계획

본 연구에서는 POD 기저벡터를 이용한 공력축소모델을 개발하였으며 2차원/3차원 문제, 정상상태/비정상상태 문제에 적용하여 보았다. 이로부터 공력축소모델은 full system과 약 5% 내외의 오차를 가지는 범위에서 모사할 수 있음을 확인하였다. 또한 snapshot을 구성하기까지의 계산비용은 필요하지만 snapshot이 구성된 후의 계산 시간은 10여분 정도로 상당한 비용절감이 가능하였다. 따라서 공력축소모델의 사용은 플러터 해석과 같은 고비용의 문제에 적용하기 타당하다고 판단된다.

감사의 글

본 연구는 교육과학기술부의 BK21 사업(차세대 기계항공시스템 창의설계 인력양성사업단), 방위사업청과 국방과학연구소의 지원으로 수행되었습니다. (계약번호 UD070041AD)

참고문헌

Lucia, D.J., Beran, P.S., Silva, W.A. (2004) Reduced-order modeling: new approaches for computational physics, *Aerospace Science*, 40, pp.51-117

강승온, 전상욱, 박경현, 전용희, 이동호 (2009, submit) 신경망 학습알고리즘의 비교와 2차원 익형의 비정상 공력하중 예측기법에 관한 연구, **한국항공우주학회지**

Lucia, D.J. (2001) Reduced Order Modelling for High Speed Flows With Moving Shocks, Ph. D Thesis, Air Force Institute of Technology, School of Engineering and Management

Holmes, P., Lumley, J.L. Berkooz, G. (1996) Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry, Cambridge University

Ashford, G.A. (1996) An Unstructured Grid Generation and Adaptive Solution Technique for High-Reynolds-Number Compressible Flows, PhD thesis, University of Michigan

Anderson, W.K., Bonhaus, D.L. (1994) An Implicit Upwind Algorithm for Computing Turbulent Flows on Unstructured Grids, *Computer Fluids*, 23(1), pp.1-21

김병곤, 전상욱, 전용희, 김정화, 이동호 (2007) 정적 공탄성 해석과 최적화 문제에서의 동적 격자의 효용성, **한국항공우주학회지**, 35(2), pp.87-93

최동수, 전상욱, 김병곤, 박수현, 조맹효, 이동호, 이경태, 전승문 (2007) 전산유체/전산구조 연계 방법을 사용한 항공기 날개의 정적 공탄성 해석, **한국항공우주학회지**, 35(4), pp.287-294

전상욱, 박경현, 강형민, 이동호 (2009) Proper Orthogonal Decomposition을 이용한 Euler Equations의 축소모델에 대한 연구, **한국항공우주학회 춘계학술대회**