

# 2자유도 진동시스템에 관한 이론적 고찰 및 진동흡진기로의 응용

## Theoretical Investigation of 2DOF Vibrating System and Its Application to Dynamic Vibration Absorber

장 선 준\* · M. J. Brennan\*\* · E. Rustighi\*\*\* · 정 형 조\*\*\*\*  
Jang, Seon Jun · M. J. Brennan · E. Rustighi · Jung, Hyung-Jo

### 요 약

본 연구에서는 동강성법을 이용하여 2자유도 진동시스템을 모델링하였다. 등가 모델을 구성한 후 Inertance의 크기에 따라 변화되는 시스템의 특성을 규명하였다. 2자유도 진동 시스템을 단일 모우드 소거에 적용할 경우 해석적인 설계 방법론을 1) 감쇠가 없는 경우 2) 1개의 감쇠기를 갖는 경우로 나누어 제시하였다.

**keywords** : 2자유도 진동시스템, 동강성법, Inerter, 다자유도 진동 흡진기

### 1. 서 론

진동흡진기는 전통적으로 단순한 스프링, 질량, 감쇠기의 1자유도 시스템으로 모델링되어왔다. 그러나 진동흡진기는 평면상에서 3자유도, 공간상에서 최대 6자유도를 가질 수 있다. Zuo와 Nayfeh는 강체가 가진 복수의 자유도를 이용하여 복수의 모우드를 제거하는 다자유도 진동흡진기를 처음으로 제시하였다(Zuo, L. and Nayfeh, S.A., 2004). 장선준과 최용제는 나선이론을 이용하여 강체를 모델링한 후 하나의 강체로 복수의 모우드를 제거하는 다자유도 진동흡진기 설계방법을 제시하였다(Jang, S.J. and Choi, Y.J., 2007) Zuo와 Nayfeh는 단일 모우드 소거의 경우에도 2자유도 진동흡진기가 같은 무게를 갖는 2개의 단일자유도 진동흡진기보다 보다 효율적임을 수치적 방법을 통하여 보였다(Zuo, L. and Nayfeh, S.A., 2006). 본 연구에서는 2자유도 진동시스템의 등가 모델을 구하여 주파수변화에 따른 물리적인 특성을 규명한 후 해석적인 2자유도 진동 시스템의 설계방법론을 제시하였다.

### 2. 시스템 모델링

그림 1은 본 연구의 대상인 진동시스템을 나타내고 있다. 회전자유도를 갖는 2자유도 강체는 각각  $d_1$ ,  $d_2$ 의 거리에 위치한 두 조의 스프링, 댐퍼들에 의해 지면에 연결되어 있으며 지반가진(Base excitation)을 받아 조화 운동을 한다. 본 연구에서는 복잡한 거동을 보이는 2자유도 강체의 운동을 모델링하기 위해 먼저 무게 중심에서 질량을 분리시킨 시스템의 동강성(Dynamic Stiffness)을 구하였다. 스프링-댐퍼들이 연결된 지점의 변위와 작용하는 힘을 각각  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ 라 하면 회전운동방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

\* KAIST 건설 및 환경공학과 박사후 연구원 seonjun.jang@gmail.com  
\*\* Professor, ISVR, University of Southampton mjb@isvr.soton.ac.uk  
\*\*\* Lecturer, ISVR, University of Southampton er@isvr.soton.ac.uk  
\*\*\*\* KAIST 건설 및 환경공학과 교수 hjung@kaist.ac.kr

$$J_a \ddot{\theta} = F_1 d_1 - F_2 d_2 \quad (1)$$

기하적관계로부터  $\theta = \frac{X_2 - X_1}{d_1 + d_2}$  이 성립하고 연결점의 동강성은 각 지점의 변위 및 힘과 각각  $K_1 = \frac{F_1}{X_1}$ ,  $K_2 = \frac{F_2}{X_2}$  의 관계를 가지므로 식(1)은 다음과 같이 바꾸어 나타낼 수 있다.

$$F_1 \left( d_1 - \frac{J\omega^2}{K_1(d_1 + d_2)} \right) = F_2 \left( d_2 - \frac{J\omega^2}{K_2(d_1 + d_2)} \right) \quad (2)$$

이때 연결점의 동강성은  $K_1 = j\omega c_1 + k_1$ ,  $K_2 = j\omega c_2 + k_2$  이다. 또한 무게중심에 작용하는 힘  $F$ 은 다음과 같이 두 힘의 합으로 나타낼 수 있다.

$$F = F_1 + F_2 \quad (3)$$

무게중심의 변위  $X$ 는 기하적관계로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X = \frac{d_1 X_2 + d_2 X_1}{d_1 + d_2} \quad (4)$$

식 (2)와 (3)에서 연결점에 작용하는 힘을 각각 나타내면 다음과 같다.

$$F_1 = \frac{F(d_1(d_1 + d_2)K_1K_2 - J\omega^2K_1)}{(d_1 + d_2)^2K_1K_2 - J\omega^2(K_1 + K_2)}, \quad F_2 = \frac{F(d_2(d_1 + d_2)K_1K_2 - J\omega^2K_2)}{(d_1 + d_2)^2K_1K_2 - J\omega^2(K_1 + K_2)} \quad (5)$$

식 (4)와 (5)로부터 무게중심에서의 동강성을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_C = \frac{F}{X} = \frac{(d_1 + d_2)^2K_1K_2 - J\omega^2(K_1 + K_2)}{d_1^2K_1 + d_2^2K_2 - J\omega^2} \quad (6)$$

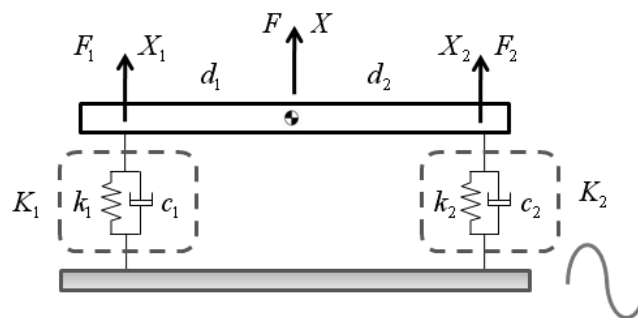


그림 1 2자유도 모델

### 3. 동역학적 특성

$J = m\rho^2$ ,  $\eta_i = \left( \frac{d_i}{d_1 + d_2} \right)^2$  ( $i=1,2$ ),  $b = m \left( \frac{\rho}{d_1 + d_2} \right)^2$  로 두면 위에서 구한  $K_C$ 는 다음과 같이 나타나게 된다.

$$K_C = \frac{K_1 K_2 - b\omega^2 (K_1 + K_2)}{\eta_1 K_1 + \eta_2 K_2 - b\omega^2} \quad (7)$$

이러한  $K_C$ 를 등가모델로 표현하면 그림 2(a)의 점선 안의 부분과 같다. 여기서  $b$ 의 값을 갖는 요소는 질량의 단위를 가지며 질량  $m$ 와 직렬로 연결되는 형태로 나타나게 되는데 이러한 특성을 갖는 기계요소를 Inerter라고 하며 이때 물리량  $b$ 는 Inertance라 한다. 또한 Inerter와 병렬 및 직렬 연결된 요소들은 각각  $K_{eqs1}$ ,  $K_{eqs2}$ ,  $K_{eqp1}$ 로 나타내었다. 간단한 표현을 위해,  $d_1 = d_2$ 로 두면 이들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_{eqs1} = \frac{2K_1 K_2}{3K_2 + K_1}, K_{eqs2} = \frac{4K_1 K_2}{3K_2 - K_1}, K_{eqp1} = \frac{2K_1 K_2}{K_1 - K_2} \quad (8)$$

식 (8)의 동강성들은 주파수에 따라서 특성이 바뀌게 되는데 실수부가 음의 부호로 바뀔 경우 겉보기질량(Apparent Mass)의 특성 또한 갖게 된다. 그림 2(a)의 시스템에서  $b = \infty$ 인 경우 Inerter의 변위는 0이 되어 시스템은 그림 2(b)와 같은 형태로 단순화되며 리셉턴스(Receptance)는  $\alpha_C = 1/K_C = K_1 + K_2$ 로 계산되는데 이는 수직운동만을 하는 1자유도 시스템의 리셉턴스와 동일하다. 반대로  $b = 0$ 인 경우 Inerter에 작용하는 힘은 0이 되며 시스템은 그림 2(c)와 같은 형태로 단순화되게 된다. 이때  $\alpha_C = 4 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$ 로 나타나는 데 이는  $K_1, K_2$ 가 직렬로 연결된 시스템의 리셉턴스의 4배이다. 여기서  $b$ 의 크기는  $K_{eqs2}$ 와 Inerter  $b$ 의 직렬연결 시스템의 전체 시스템에 대한 참여도를 결정하는 것임을 추론할 수 있다.

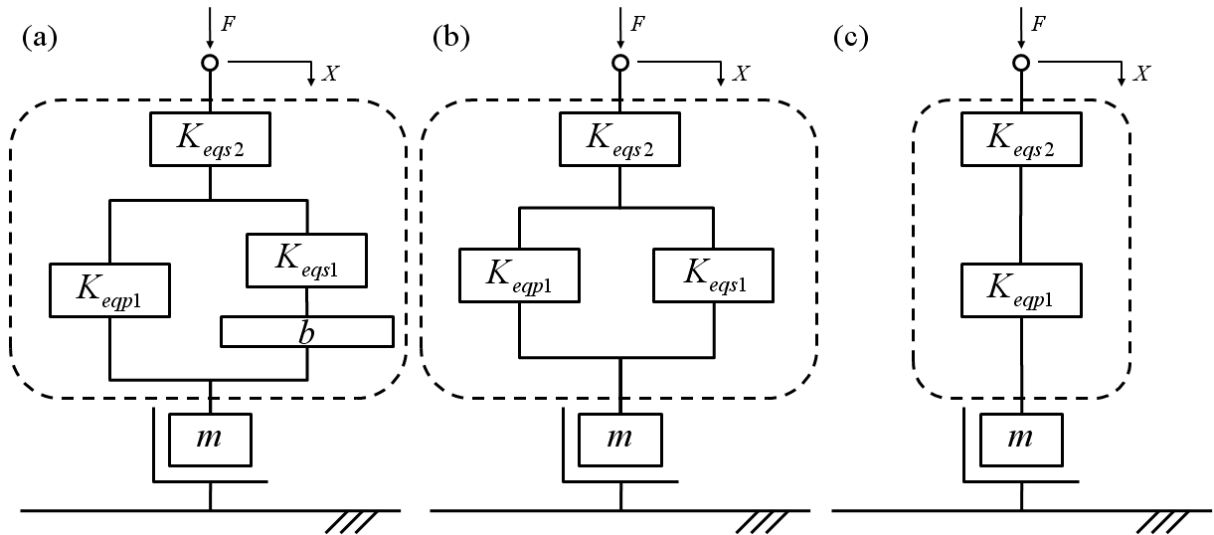


그림 2 등가모델 (a) 일반적인 경우, (b)  $b = \infty$ 인 경우, (c)  $b = 0$ 인 경우

#### 4. 비감쇠 2자유도 진동흡진기의 설계

2자유도 시스템의 리셉턴스는 다음과 같이 얻어지게 된다.

$$\alpha_{DVA} = \frac{1}{K_C} - \frac{1}{\omega^2 m} \quad (9)$$

$\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{4}$  이며 비감쇠인 경우( $c_1 = c_2 = 0$ ), 식 (9)를 전개하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\alpha_{DVA} = \frac{(k_1 + k_2) \left( \frac{k_1 k_2}{b(k_1 + k_2)} - \omega^2 \right)}{\omega^4 - \frac{(4b + m)(k_1 + k_2)}{4bm} \omega^2 + \frac{k_1 k_2}{bm}} \quad (10)$$

식 (10)은 다음과 같은 두 개의 공진점을 갖게 된다.

$$\omega_{n1,2}^2 = \frac{k_a}{m_a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4\gamma_1 \gamma_2 \mu_a (1 - \mu_a)} \right) \quad (11)$$

여기서,  $m_a = \frac{4bm}{4b+m}$ ,  $k_a = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ,  $\gamma_1 = \frac{k_1}{k_a}$ ,  $\gamma_2 = \frac{k_2}{k_a}$ ,  $\mu_a = \frac{m_a}{m}$ .

두 개의 공진점은  $\sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$  를 중심으로 하여 나타나게 되므로 흡진기가 연결될 시스템이  $m_s$ 의 질량과  $k_s$ 의 강성으로 이루어진 1자유도 비감쇠 시스템인 경우 다음과 같은 튜닝규칙을 제시할 수 있다.

$$\frac{k_s}{k_a} = \frac{m_s}{m_a} \quad (12)$$

## 5. 하나의 감쇠기를 갖는 2자유도 진동흡진기의 설계

2자유도 진동시스템이 하나의 감쇠기만을 가질 때 ( $c_2 = 0$ ), 주파수응답선도상에 감쇠값에 관계없는 불변점들이 나타나게 된다. 본 연구에서는 이러한 불변점을 이용하여 하나의 감쇠기만을 가질 때 주물체의 응답을 최소화시키는 설계법을 제안하였다. 주 물체와 흡진기의 무게의 비( $\mu_m$ )가 주어졌을 때 네 개의 불변점들의 높이의 표준편차를  $\mu_a$ 와  $\gamma_1$ 에 대한 컨투어맵(Contourmap)으로 나타낼 수 있는데, 여기서 표준편차값이 최소가 되는 지점의 변수들을 선택하고 응답을 최소화시키는  $c_1$  값을 선택하면 그림 3의 결과를 얻을 수 있다. 여기서 제시된 기법이 Zuo, L와 Nayfeh, S.A.의 수치 최적화 방법과 유사한 수준의 모우드 제거 효과를 나타냄을 확인할 수 있다.

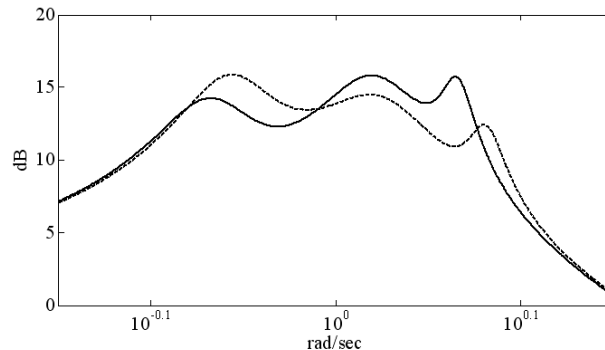


그림 3 주 물체의 응답(점선: Zuo, L.의 결과, 실선: 본 논문의 설계결과)

### 감사의 글

본 연구는 국토해양부 첨단도시개발사업의 연구비지원(07첨단도시 A01)과 2007년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행되었음(KRF-2007-357-D00009).

### 참고문헌

- Zuo, L. and Nayfeh, S.A.** (2004) Minimax optimization of multi-degree-of-freedom tuned mass dampers, *Journal of Sound and Vibration*, 272, pp. 893~908.
- Jang, S.J. and Choi, Y.J.** (2007) Geometrical design method of multi-degree-of-freedom dynamic vibration absorbers, *Journal of Sound and Vibration*, 303, pp. 343~356.
- Zuo, L. and Nayfeh, S.A.** (2006) The two-degree-of-freedom tuned-mass damper for suppression of single-mode vibration under random and harmonic excitation, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 128, pp. 56~65.