트림영역이 있는 NURBS 평면의 스플라인 유한요소해석

Spline FEM for Trimmed NURBS Surfaces

김 현 중* • 서 유 덕** • 윤 성 기***
Kim, Hyun-Jung • Seo, Yu-Deok • Youn, Sung-Kie

요 약

본 논문에서는 트림영역이 있는 NURBS 평면을 등기하 해석할 수 있는 방법을 제시한다. 기존 등기하 해석법으로 트림 NURBS 곡면을 해석하기 위해서는 해석 도메인이 여러 개의 사각형 패치로 분할되어있어야 한다. 그러나 본 연구에서 제안한 방법은 CAD에서 제공하는 트림곡선의 정보를 해석에 직접 사용할 수 있기 때문에 CAD 모델을 별도로 재구성해야하는 번거로움이 없다. NURBS 곡선 투영법을 이용하여 트림되는 요소를 찾고, 트림된 요소는 쿼드트리 분할법과 NEFEM에서 사용된 적분방법을 동시에 고려하면 어떤 경우의 트림 요소라도 적분이 가능하다. 다양한 수치 예제를 통하여 제안한 해석 방법을 검증하고, 기존의 등기하해석법으로 해석하기 어려운 다수의 트림영역이 존재하는 NURBS 평면을 해석하여 본 방법의 유용성을 검토한다.

keywords : 트림영역, 등기하 해석법, 트림 NURBS 곡면

1. 서 론

등기하 해석법(Isogeometric analysis) (T.J.R. Hughes, 2005)은 형상을 표현하는 함수와 해석에 사용되는 기저함수로 스플라인 함수를 사용한다. 이 해석법은 CAD에서 형상을 표현하는데 사용하는 스플라인 함수를 해석에 바로 사용할 수 있기 때문에 별도로 유한요소모델을 생성할 필요가 없고, 형상근사에 의한 해의 오차가 없어 해의 정확도를 향상시킬 수 있다. 그러나 NURBS 기반 유한요소 해석방법은 텐서곱(tensor product) 형태를 근간으로 하기 때문에 이로 인한 몇 가지 제약을 수반한다. 첫 번째는 효율적인 국부세분화를 할 수 없다는 점이다. 응력이 집중하는 문제와 같이 국부적인 세분화를 필요로 하는 문제의 경우, 하나의 조정점(control point)을 삽입하게 되면 열 혹은 횡 방향으로 불필요한 조정점들이 자동으로 생성된다. 이러한 NURBS 의 문제점을 해결하기 위해 Sederberg는 T-접합점(T-junctions)의 개념을 이용하여 국부적으로 조정점 삽입이 가능한 T-스플라인을 제안하였다. 또한 기존의 NURBS 기반 유한요소해석 방법은 해석 모델이 항상 텐서곱 형태의 사각형 패치(rectangular patch)로 구성되어야 한다는 한계를 갖고 있다. 내부홀이 있는 문제의 경우, 해석을 위해서는 최소 4개의 사각형 패치로 구성되어 있어야 한다. 복잡한 형상을 갖는 문제의 경우 사각형 형태의 패치 조합으로 표현하는 데는 한계가 있으며, CAD시스템에서 구현이 가능하다고 하더라도 이를 위해서는 많은 시간과 노력이 필요하다. 일반적으로 CAD시스템에서 내부홀이 있는 문제는 곡면

* 학생회원 • KAIST 기계공학과 박사과정 kim1392@kaist.ac.kr
** 학생회원 • KAIST 기계공학과 박사과정 imop@kaist.ac.kr
*** 정회원 • KAIST 기계공학과 교수 skyoun@kaist.ac.kr

트리밍(surface trimming) 방법으로 모델링을 수행한다. 본 연구에서는 별도의 사각형 형태의 패치 재구성 없이, CAD 에서 제공하는 트림 곡선과 트림곡면의 정보를 해석과 직접 연계하여 트림곡면을 효과적으로 해석할 수 있는 방법을 제안하고자 한다.

2. 트림 요소 검색

트림 NURBS 곡면은 NURBS 곡면과 이를 트림하게 될 트림곡선들로 구성된다. NURBS 곡면과 트림곡선은 서로 다른 매개변수의 공간들로 구성된다. 본 연구에서는 트림되는 요소를 검색하기 위해서 NURBS 곡선 투영방법을 이용하였다. 트림 곡면 내에 존재하는 트림 곡선의 방향은 일정한 법칙을 따른다. 트림곡선의 오른쪽에 위치하는 영역은 항상 트림된 영역(void region)이 된다. 즉, 내부홀이 있는 문제의 경우 트림곡선의 방향은 항상 시계방향이 된다. 특정한 점이 트림곡선 내/외부에 존재하는지 판별하기 위해서 트림곡선에 투영하여 근접 투영점을 찾고, 근접 투영점에서의 트림곡선의 미분벡터와 특정점에서 근접 투영점까지의 벡터의 외적값이 지면 위 방향을 향하게 되면 이는 트림곡선 외부의 점이 된다. 이와 같은 방법을 이용하면 임의의 점이 매개변수 영역에서 트림된 영역에 존재하는지 아닌지 판별할 수 있다.

트림요소 검색단계는 크게 두 단계로 이루어진다. 요소 중앙점에서 트림곡선으로 투영하여 근접 투영점과 중앙점과의 거리(d)를 계산하여 트림요소를 판별하는 단계이다. r_{in}를 요소 내접원의 반지름, r_{out}를 요소 외접원의 반지름이라 하면, 크기 비교를 통해 각 요소들은 아래와 같이 세 경우로 구분될 수 있다.

경우 1 : $d \le r_{in}$ -> 트림 요소
경우 2 : $r_{in} \le d \le r_{out}$ -> 판단 할 수 없는 요소
경우 3 : $r_{out} \le d$ -> 트림되지 않은 요소

경우 2는 첫 번째 단계로는 트림요소 여부를 판단할 수 없기 때문에, 트림곡선 내외부 판별법을 요소의 네 꼭지점에 대해 수행하여 트림요소 여부를 판별한다. 모든 꼭지점이 트림영역에 속하지 않거나, 속하게 되면이는 트림되지 않은 요소이고, 그렇지 않은 경우는 트림 요소가 된다. 위와 같은 트림요소 검색 방법은 어떠한 경우의 트림된 요소라도 검색할 수 있다.

3. 트림 요소 적분

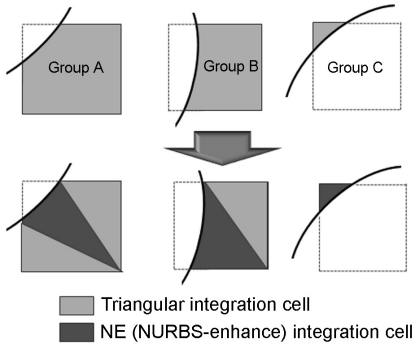

그림 1 트림 요소 분류 및 트림 요소 분할

모든 트림요소는 그림 1과 같이 요소의 네 꼭지점 판별을 통해 세 그룹으로 구분할 수 있다. 한 개의 꼭지점이 트림영역에 있으면 그룹 A, 두 꼭지점이 있으면 그룹 B , 세 꼭지점이 트림영역 안에 존재하면 그룹 C 로 분류한다. 하나의 트림요소에 다수의 트림곡선이 지나거나 트림 곡선의 곡률 변화가 심한 경우는 적분격자가 그림 1의 세 그룹으로 구분될 때까지 쿼드트리를 이용하여 적분격자를 세분화한다. 트림 요소의 적분을 위해 트림요소분할을 수행하는데 일반 삼각형 적분 격자는 삼각형 가우스 구적법을 사용하고, 한 변이 NURBS 곡선을 갖는 삼각형 적분 격자의 경우 NE-적분법을 사용한다. NE-적분법은 NEFEM에 제안된 방법으로 한 변이 NURBS 곡선으로 표현되는 삼각형 격자를 정확하게 적분할 수 있는 적분 기법이다. 그림 2에 NURBS 곡선을 갖는 삼각형 적분격자에 대한 변환 관계를 나타내었다.

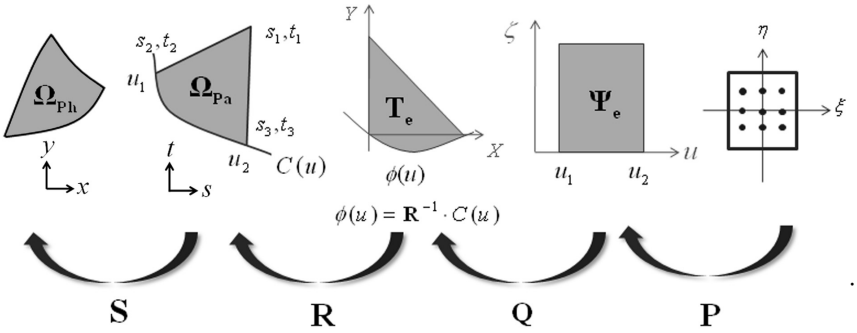

그림 2 한 변이 NURBS 곡선을 갖는 삼각형 격자의 변환식

변환 R^{-1}은 Ω_{pa}영역에서의 삼각형 적분격자(st-좌표)를 꼭지점이 각각 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$인 삼각형 격자(XY-좌표)로 변환하는 1차 변환이다. 본 연구에서는 삼각형 FEM 형상함수를 사용하였다. 따라서 XY-좌표에서 정의되는 NURBS 곡선은 $\phi(u) = R^{-1} \bullet C(u)$ 의 관계식으로 표현할 수 있다. 변환 Q 는 가우스 구적법을 사용하기 위해 삼각형 영역과 사각형 영역과의 관계를 나타내는 변환식이다. (Huerta, A, 2008) 여기서 주목할만한 점은 NURBS 곡선의 정보가 변환식에 반영되어있다는 점이다. 이러한 관계에 따라 가우스 적분점은 NURBS 곡선을 갖는 삼각형 격자 내부에 배치되게 된다. 변환 P 는 단순한 스케일 크기 변환이며, 가우스 적분점을 Ψ_e 영역에 배치한다. 변환식 R 과 P 는 1차 선형 변환관계이기 때문에 계산비용이 많이 소요되지 않는다. 기존의 스플라인 FEM 과 비교했을 때 Q 변환이 추가되었음을 알 수 있다. 일반 삼각형 격자의 적분은 기존 스플라인 FEM에서 사각형 요소의 적분 방법과 동일하며, 삼각형 가우스 구적법을 사용한다.

4. 검증 예제

그림 3(a)은 두 트림곡선이 있는 해석 예제이다. 그림 3(b)와 그림 3(c)는 트림곡면해석에서 사용된 매개변수 영역과 물리적 영역을 나타내었다. 그림 3(c)에서 붉은색으로 표기 된 점들은 해석에 사용된 조정점, 트림영역 내부에 검정색으로 표기된 점들은 비활성 조정점들을 나타낸다. 비활성 조정점은 해석영역에 영향을 미치지 않기 때문에 해석에서 사용되지 않는다. 그림 4(a) 와 같이 트림곡선의 법선방향으로 하중을 부과하였으며 제안한 방법과 ABAQUS 해석 결과 응력분포는 각각 그림 4(b)와 그림 4(c) 와 같다. ABAQUS는 제안한 방법의 해를 비교하기 위해 충분히 많은 수의 절점을 사용하였다. 두 해석 결과가 상당히 동일한 분포를 보임을 관찰할 수 있다. 제안한 트림곡면해석 방법을 이용하면 하나의 패치만을 이용해서 복잡한 형상을 갖

는 문제를 해석하기 때문에, 도메인 내 응력 불연속 문제가 발생하지 않는다. 또한 임의의 위상을 갖는 트림 곡면에 대해 자유롭게 해석이 가능하며, CAD와 해석간의 데이터 교환이 자유로워 해석 및 설계 과정의 효율성 제고에 획기적인 기여를 할 수 있을 것이라 판단된다.

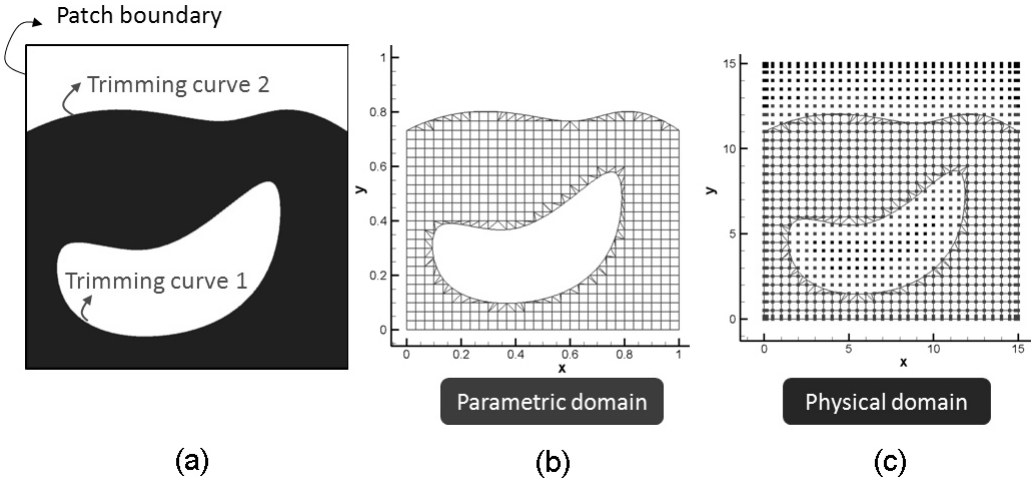

그림 3 검증 예제 (a) 두 트림영역이 있는 NURBS 평면 ; (b) 매개변수 영역 ; (c) 물리적 영역

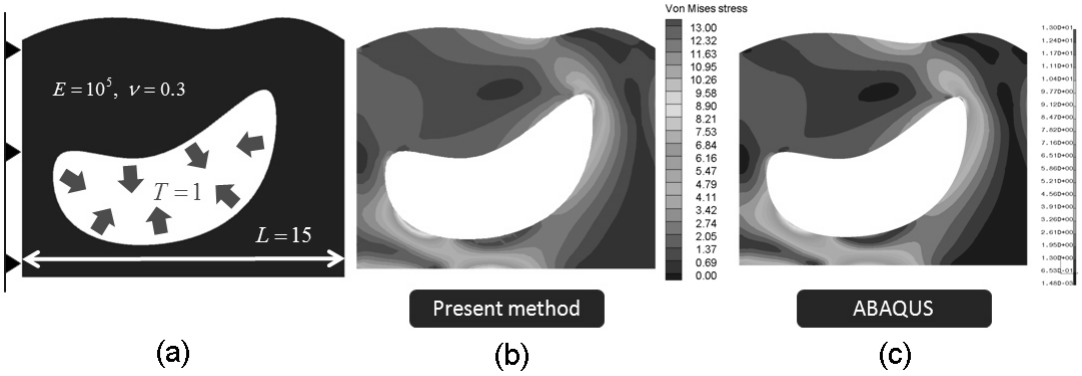

그림 4 (a) 문제 정의 ; (b) 제안한 방법의 해석 결과 응력 분포 ; (c) ABAQUS 해석 결과 응력 분포

감사의 글

본 연구는 한국학술진흥재단의 'T-스플라인 기반 CAD/CAE 통합 기법 연구'에 의하여 지원되었음. (KRF-2007-313-D00024)

참고문헌

Hughes, T. J. R (2005). Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 ,pp 4135-4195.

Huerta, A. (2008) NURBS-enhanced finite element method (NEFEM), *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76, pp.56-83.