

## 압연 중 급준도 모델 개발

김진석<sup>1</sup>, 황상무<sup>#</sup>

### Development of Wave Prediction Model in Flat Rolling

J. S. Kim, S. M. Hwang

#### Abstract

Excessive wavy surfaces formed by a cold or hot-rolling process in a thin plate degrade the value of the plate significantly, which is called flatness problem in the industry. It is a result of post-buckling due to the residual stress caused by the rolling process. A unique difficulty of the problem as a buckling problem is that the buckling length is not given but has to be found. A new approach is developed to solve the flatness problem by extending a classic post-buckling analysis method based on the energy principle. The approach determines the buckling length and amplitude. The new solution approach can be used to determine the condition for the maximum rolling production that does not cause the flatness problem.

**Key Words:** steepness, waviness, flatness, buckling

#### 1. 서론

교정과정을 거치기 전의 판을 보면 상당히 많은 판재들이 파도물결 모양의 형상을 가지고 있는 것을 볼 수 있다. 이것은 압연 공정 중 발생한 잔류응력 때문인데, 현장에서는 이것을 급준도(waviness or flatness)문제라고 부른다. 이것은 제품의 상품가치를 저하시킨다.

wave가 발생한 판은 압연 후 leveling이나 edge trimming 공정을 거치게 되는데 이런 공정들은 추가적인 공정비용 또는 추가적인 생산손실을 야기하기 때문에 그리 효과적이지 않다. 더군다나, 생산라인에서 wave가 심하게 발생되면 라인을 중단시켜야 하는 문제까지 발생하게 된다. 그러므로 가장 이상적인 방법은 정확한 wave예측을 모델을 통해 wave가 발생하지 않는 공정조건을 알아내는 것이며, 이것은 post-buckling 해석을 통해 구현될 수 있다. 이 문제는 연속적으로

매우 긴 판에 대한 해석이므로, 다른 buckling 문제와 달리 wave length를 계산해야 한다.

Timoshenko와 Gere는 판의 wave를 에너지 방법론을 사용하여 계산하였다[1]. 그들은 그 시스템의 에너지가 최소가 되는 방향으로 평형이 결정된다는 principle of minimum energy를 이용하였다. 이 이론을 확장하여 wave length를 결정한다. 즉, 전체 판(entire rolled plate)의 에너지를 최소로 만드는 조건에서 wave length를 결정한다.

#### 2. 정의

그림 1 (a)는 판 wave 형상 및 wave length와 amplitude의 정의를 나타내었다. 현장에서 wave의 크기를 나타내는 데 사용되는 급준도는 식 (1)과 같이 amplitude와 wave length의 비로 정의된다.

$$\lambda = \frac{f}{L} \tag{1}$$

1. 포항공과대학교 기계공학과  
# 교신저자: 포항공과대학교 기계공학과  
E-mail: smhwang@postech.ac.kr

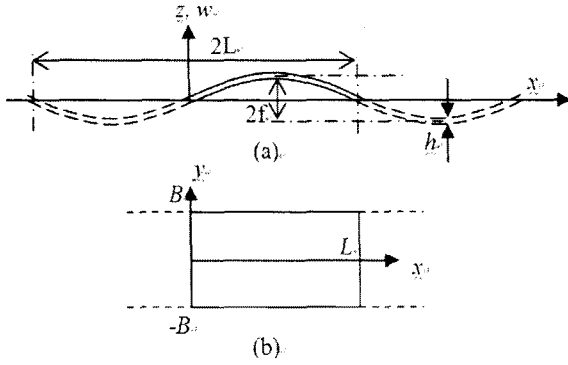


Fig. 1 (a) definitions (b) coordinate system

그림 2-1 (b)에는 사용될 좌표 계를 나타내었다. x는 길이 방향, y는 폭 방향 z는 두께 방향을 나타내며, 각 방향에서의 변위는 u, v, w이다.

잔류응력은 판 변형 모델을 이용하였다[2].

### 3. 급준도 해석 모델

#### 3.1 Post-Buckling Analysis

판에 존재하는 에너지는 bending, twist 그리고 middle plane deformation에 의한 strain energy이며, 식 (2)와 같이 정리된다. 적분구간은 판의 대칭성에 의해 길이방향으로는 [0, L], 폭 방향으로는 [0, B]이다.

$$U = \frac{1}{2} D \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy + \frac{h}{2} \iint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad (2)$$

응력과 변형률의 관계식은 식 (3)과 같고, 변형률과 변위의 관계식은 식(4)와 같다.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (3-1)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (3-2)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (3-3)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (4-1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (4-2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4-3)$$

변형률과 변위의 관계식인 식 (4)는 작은 변형률과 적당한 크기의 회전(small strain and moderate rotation)일 때 만족되는 식이므로 pre-buckling 해석뿐만 아니라 buckling이 발생했을 때인 post-buckling 해석에도 사용될 수 있다[1, 3]. 식 (3), (4)를 이용하여 식 (2)를 정리하면 식 (2)는 u, v, w의 함수가 된다. 경계조건 등을 고려하여 u, v, w를 합리적으로 가정하고 strain energy를 최소화시키는 u, v, w 계산하면, 계산된 u, v, w는 판에 어떤 하중이 가해졌을 때 그 하중에 대해 평형을 나타내는 변위이다. 이 때, u, v, w에는 가해진 하중(또는 잔류하중)에 대한 부분이 포함되어야 한다.

위에서 전개된 post-buckling 이론을 압연 문제에 적용하여 전개해 보자. 여기서는 wave length 역시 계산되어야 하는 값임을 주의한다.

식 (2)에서 압연 중 폭 방향의 응력( $\sigma_y$ )과 전단 응력( $\tau_{xy}$ )이 0인 것과 이 때의 길이 방향의 응력이  $E \cdot \varepsilon_x$ 인 것을 고려하면 식 (2)는 식 (5)와 같이 정리되며, 이것은 u와 w의 함수이다.

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy + \frac{Eh}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 \right] dx dy \quad (5)$$

w는 식 (6)와 같이 가정할 수 있고, u는 식 (7)의 평형방정식 및 경계조건으로부터 구할 수 있다.

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \sin \alpha x \quad \left( \alpha = \frac{\pi}{L} \right) \quad (6) = \sum_{i=1}^N c_i \left( \frac{y}{B} \right)^{2(i-1)} \sin \alpha x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (7-1)$$

$$\begin{cases} u = -e(y) & \text{at } x=0 \\ u = e(y) & \text{at } x=L \end{cases} \quad (7-2)$$

식 (7)을 이용하여  $u$  를 구하면 식 (8)과 같다.

$$u = e(y) \frac{2x-L}{L} - \frac{1}{8} \alpha W^2 \sin 2\alpha x \quad (8)$$

$$\left( \text{where, } e(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_x}{E} \cdot L \right)$$

식 (8)에서 첫 번째 항은 잔류응력에 의해 발생한 길이방향 변위이고 두 번째 항은 transverse deflection (wave)에 의해 발생한 길이방향 변위이다. Wave 가 발생하더라도 straight line 은 straight line 으로 가야 하기 때문에 두 번째 항은  $x=0$  과  $x=L$  에서 0 이어야 한다.

식 (6), (8)을 식 (5)에 대입하고 정리하면 strain energy 는 폭 방향 형상을 결정하는  $c_i$  와 wave length,  $L$  의 함수가 된다. 그리고 wave length 를 알고 있다고 가정하면, strain energy 는  $c_i$  만의 함수가 되고, strain energy 가 최소가 되기 위해서는  $\delta U$  가 0 이 되어야 하므로,

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = 0 \quad (9)$$

### 3.2 Flatness analysis

3.1 에서 기술된 post-buckling 해석을 확장하여 급준도 해석. 즉, wave length를 포함한 wave의 형태를 구할 수 있다. 앞에서 적용된 이론을 전체 판으로 확장한다. 다시 말하면, 전체 판(entire rolled plate)의 energy가 최소화 되는 방향으로 wave가 발행한다고 생각하는 것이다.

전체 판의 에너지는  $(U/L) \cdot L_T$  이다.  $U$  는 식 (5)에서 정의된 1개 wave length에 대한 strain energy 이고,  $L_T$  는 전체 판의 길이이다. 주어진  $L_T$  에 대해서, wave는  $U/L$  이 최소화 되는 방향으로 발생한다. 즉,  $\delta(U/L)=0$  이 되는  $c_i$  와  $L$  을 찾는 것이다.

식 (5)를  $L$  로 나누고 식 (6), (8)을 대입한다. 길이방향에 대한 적분을 수행하고,  $L$  을  $\Sigma$  안으로 집어넣으면, 단위길이당 에너지(또는 전체 판에 대한 에너지)를 식 (10)과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{U}{L} = \frac{E \cdot h}{32} \left\{ \pi^4 \cdot K_3 + 8\pi^2 \cdot K_4 + 16J_1 \right\} \quad (10)$$

$$+ \frac{D}{4} \left\{ \frac{\pi^4}{L^2} K_1 + 2(1-\nu)\pi^2 K_5 - 2\nu\pi^2 K_6 + L^2 K_2 \right\}$$

Where,

$$K_1 = \int_0^b \left( \sum \frac{c_i}{L} \phi_i \right)^2 dy \quad K_2 = \int_0^b \left( \sum \frac{c_i}{L} \frac{d^2 \phi_i}{dy^2} \right)^2 dy$$

$$K_3 = \int_0^b \left( \sum \frac{c_i}{L} \phi_i \right)^4 dy \quad K_4 = \int_0^b \frac{\sigma_x}{E} \left( \sum \frac{c_i}{L} \phi_i \right)^2 dy$$

$$K_5 = \int_0^b \left( \sum \frac{c_i}{L} \frac{d\phi_i}{dy} \right)^2 dy \quad K_6 = \int_0^b \left( \sum \frac{c_i}{L} \phi_i \right) \cdot \left( \sum \frac{c_i}{L} \frac{d^2 \phi_i}{dy^2} \right) dy$$

$$J_1 = \int_0^b \left( \frac{\sigma_x}{E} \right)^2 dy$$

식 (10)은  $c_i/L$  와  $L^2$  의 함수이며, 위 식이 최소가 되기 위해서는  $\delta(U/L)=0$  이므로

$$\frac{\partial(U/L)}{\partial(c_i/L)} = 0, \quad \frac{\partial(U/L)}{\partial(L^2)} = 0 \quad (11)$$

식 (10)에서  $L^2$  에 대한 항은 두 번째 중괄호의 첫 번째, 네 번째 항에만 선형적으로 존재한다. 그러므로 식 (11)의 두 번째 식을 이용하여  $L^2$  을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$L = \pi \cdot \sqrt{K_1 / K_2} \quad (12)$$

식 (12)는 wave length 가 판의 폭 방향 형상에 의존함을 의미한다. 판의 폭 방향 형상은 잔류응력의 분포와 크기를 모두 반영하고 있기 때문에, 식 (12)는 wave length 가 하중 분포뿐만 아니라 하중의 크기에도 영향을 받는다는 것을 의미한다.

$L^2$  이  $c_i/L$  의 함수이므로 식 (10)은  $c_i/L$  만의 함수이다.  $U/L$  을 최소화시키는  $c_i/L$  를 최종 계산한 후, 계산된  $c_i/L$  를 이용하여, 식 (12)에서 wave length 를 계산한다. 계산한 wave length 를  $c_i/L$  에 곱해주면  $c_i$  를 얻을 수 있다.  $L$  과  $c_i$  가 판의 wave 를 결정하는 변위  $w$  를 결정한다. 비선형 방정식 계산은 Newton-Rapson method 및 line-search 를 이용한다.

#### 4. 결과

	edge wave	center wave
temperature	931.70 °C	859.0 °C
Width(2B)	1162.00 mm	964.00 mm
Thickness(h)	2.03 mm	1.64 mm

Table 1 Geometry and temperature of the plate

표 1 에 판의 geometry 와 압연 후 온도를 나타내었다. 이 데이터와 계산된 잔류응력을 사용하여 판의 급준도 형상을 계산하였다. 판 변형 모델을 사용하여 계산된 잔류응력은 그림 2 와 같다.

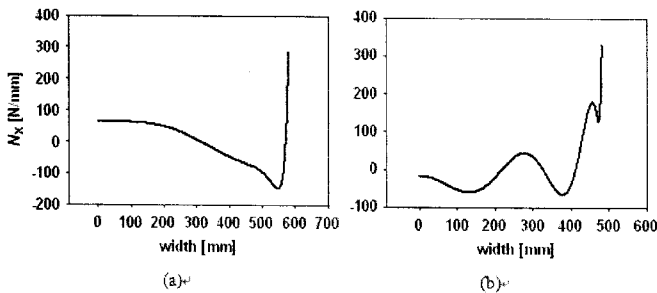


Fig. 2 residual load distribution calculated by strip deformation model (a) case1 (b) case2

그림 2의 계산된 판의 wave data는 표 2와 같고, 폭 방향 wave 분포는 그림 3과 같다.

	Case1	Case2
2L	910.443 mm	742.896 mm
2f	20.772 mm	9.642 mm
$\lambda$	2.282 %	1.298 %

Table 2 wave data (a) case1 (b) case2

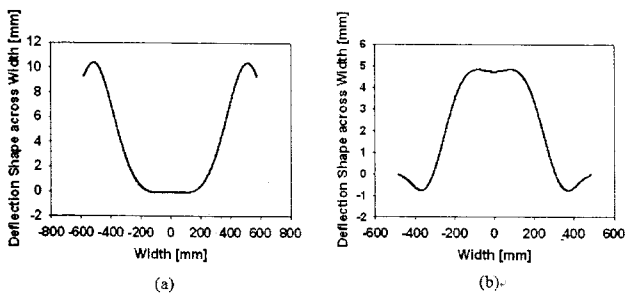


Fig.2 deflection shape across width (a) case1 (b) case2

특히, 여기서 case1의 경우는 실험 결과 평균 급준도가 2.125%로서 모델의 결과와는 7.4% 정도의 받아들일만한 오차를 가진다.

#### 5. 요약, 결론 및 향후 계획

압연된 판에 발생하는 주기적인 과도 모양의 형상을 예측하기 위한 새로운 방법을 제안하였다.

wave 문제 또는 flatness 문제로 불리는 이것은 압연 공정 중 판의 내부에 발생한 잔류 응력에 의한 buckling 문제이다. 일반적인 buckling 문제와 달리 이 문제는 buckling length 가 주어지지 않았고 계산되어야 한다.

에너지 방법론에 기초해 wave length 를 포함한 wave 를 예측하는 새로운 접근법을 제안하였다. 이 접근법은 전체 판(entire rolled plate)에 대해 minimum energy 를 가지는 형태로 wave 가 결정된다는 이론이며, 결론적으로 단위길이당 에너지를 최소화하는 것과 동일하다.

이 해석의 결과를 실험데이터와 간단히 비교하였다. 개발된 모델을 통해 판 두께, 판 폭, 하중의 크기에 따른 급준도의 변화를 정성적으로 파악할 수 있을 것이다.

#### 참고 문헌

- [1] Timoshenko, S. P., and Gere, J. M., 1963: Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York
- [2] 김용기, 황상무, 2004, 판 변형 정밀 예측을 위한 폭 방향 압하력 및 tension 분포예측 모델 개발, 제 5회 압연심포지엄, pp 153~162
- [3] Reddy, J. N., 2004, An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, Oxford, New York
- [4] Shohet, K. N. and Townsend, N. A., 1971, Flatness control in plate rolling, J. Iron Steel Inst., vol. 206, pp 769~775
- [5] Fischer, F.D., Rammersdorfer, F.G., Friedel, N., Wieser, W., 2000, Buckling phenomena related to rolling and leveling of sheet metal, Int. J. Mechanical Science, vol. 42, pp 1887~1910
- [6] Komori, K., 1998, Analysis of cross and vertical buckling in sheet metal rolling, Int. J. Mechanical Science, vol. 40, pp 1235~1246