다중제한조건을 갖는 부밴드 AP 알고리즘의 수렴해석

김 영 민* · 손 상 욱** · 최 훈* · 배 현 덕**

*동의대학교 전자공학과 · **충북대학교 전기공학과

Convergence Analysis of Multiple Constrained Subband Affine Projection Algorithm

Young-Min Kim* · Sang-Wook Sohn** · Hun Choi** · Hyeon-Deok Bae**

*Dept. of Electronic Eng., Dong-Eui University

**Dept. Electrical Eng., Chungbuk National University

E-mail : *kianos@naver.com · *hchoi@deu.ac.kr · **hdbae@chungbuk.ac.kr

요 약

반향제거 또는 채널등화와 같은 무선통신 시스템에서 적응필터링은 매우 실용적이다. 적응필터의 계수갱신을 위해 사용되는 적응 알고리즘의 수렴성능은 입력신호의 상관도와 적응필터의 길이에 의존한다. 높은 입력상관도와 긴 길이의 적응필터는 수렴성능을 저하하므로 이러한 문제점을 해결하기 위해 최근 부밴드 구조에서 입력상관도를 사전제거하고 적응필터 계수를 갱신하는 부밴드 AP 알고리즘이 제안되었다. 본 논문에서는 다중제한조건을 갖는 부밴드 AP 알고리즘의 수렴성능 해석방법을 제시한다.

ABSTRACT

In the radio communication, such as echo cancellation and channel equalization, adaptive filtering is very practical. Its convergence behavior that is used for updating the weights depends on the correlation of the input signal and length of adaptive filter. Highly correlated input and long length of adaptive filter deteriorate the convergence behavior. To solve this problem, recently, subband affine projection algorithm which pre-whiten the correlation of the input and update the weights in subband structure has been presented. This paper presents convergence analysis method of multiple constrained subband affine projection algorithm.

키워드

Subband Affine Projection Algorithm, Adaptive Filter, MSE, Statistical Analysis

Ⅰ. 서 론

반향제거 또는 채널등화와 같은 무선통신 시스템에서 적응필터링은 널리 사용된다[1]. 그러나 적응필터의 계수갱신을 위해 사용되는 적응 알고리즘에서 높은 입력상관도와 긴 길이의 적응필터로 인해 수렴성능을 저하되는 단점이 있다. 이러한 문제점을 해결하기위해 최근 부밴드 구조에서 입력상관도를 사전제거하고 적응필터 계수를 갱신하는 부밴드 AP 알고리즘이 제안되었다[2]. SAP 알고리즘은 정규직교 분해필터 (orthonormal analysis filters: OAF)를 이용하여 입력신호를 사전 백색화 (pre-whitening)하고 투사과정 (projection operation)을 통해 빠른 수렴속도를 얻을 수 있다. 더불어 부밴드 적응필터의 길이와 투사차원(projection order)을 줄임으로써 계수갱신에 필요한 계산량을 효과적으로 줄일 수 있다.

최근 SAP 알고리즘에서 부밴드 수(M)와 투사차원 (P)가 같을 경우인 MPDSAP 알고리즘에서 평균자승오차 (Mean Square Error : MSE)에 대한 통계적 해석이 발표되었다[3].

본 논문에서는 다중제한조건을 갖는 SAP 알고리즘의 평균계수벡터 (mean weight vector)와 MSE에 대한 통계적 해석을 제시한다.

Ⅱ. SAP 알고리즘의 평균자승오차거동

부밴드 구조에서 SAP(Subband Affine Projection) 알고리즘은 다음과 같이 나타낼수 있다.[2]

$$s(k+1) = s(k) + \mu X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}\epsilon(k) \tag{1}$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} X_{00}(k) & X_{10}(k) & \cdots & X_{(M-1)0}(k) \\ X_{01}(k) & X_{11}(k) & \cdots & X_{(M-1)1}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{0(M-1)}(k) & X_{1(M-1)}(k) & \cdots & X_{(M-1)(M-1)}(k) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$X(k)\ is\ MN_s \times MP_s$$

$$X_{ij}(k) = [\phi_{ij}(k)\ \ \phi_{ij}(k-1)\ \cdots\ \phi_{ij}(k-P_s+1)] \tag{3}$$

$$\phi_{ij}(k) = [\phi_{ij}(k),\ \phi_{ij}(k-1),\ \cdots,\phi_{ij}(k-N_s+1)]^T \tag{4}$$

$$\epsilon_s(k) = [\epsilon_0^T(k),\ \epsilon_1^T(k),\ \cdots,\epsilon_{M-1}^T(k)]^T \tag{5}$$

$$\epsilon_s(k)\ is\ MP_s \times 1$$

$$\epsilon_i(k) = [e_i(k),\ e_i(k-1),\ \cdots,e_i(k-P_s+1)]^T \tag{6}$$

SAP 알고리즘에서 평균자승오차(MSE)는 식() 로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.[4]

$$\begin{aligned} J(k) &= \frac{1}{M}E\{\epsilon^T(k)\epsilon(k)\} \\ &= \frac{1}{M}\left(E\{v_s^T(k)X(k)X^T(k)v_s(k)\} - E\{z_s^T(k)X^T(k)v_s(k)\}\right. \\ &\quad \left.- E\{v_s^T(k)X(k)z_s(k)\} + E\{z_s^T(k)z_s(k)\}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

[3]에서의 가정3을 이용하여 두 번째 항과 세 번째 항은 제거가 가능하며, $K(k) = E\{v_s(k)v_s^T(k)\}$라 두면 식(7)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J(k) &\approx \frac{1}{M}\left(E\{v_s^T(k)X(k)X^T(k)v_s(k)\} + E\{z_s^T(k)z_s(k)\}\right) \\ &= \frac{1}{M}\left(tr[R_{XX^T}(k)K(k)] + E\{z_s^T(k)z_s(k)\}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

식(7)을 정리하면 다음과 같다.

$$J(k) = P_s\sigma_u^2\, tr[K(k)] + P_s\sigma_z^2 \tag{9}$$

여기서 $R_{XX^T}(k) = M\sigma_u^2$, $E\{z_s^T(k)z_s(k)\} = M\sigma_z^2$.

$tr[K(k)]$를 구하기 위해 계수오차 벡터의 상관 행렬을 다음과 같이 표현할 수 있다.[3]

$$\begin{aligned} &E\{v_s(k+1)v^{T_s}(k+1)\} \\ &= E\{(I - \mu X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)) \\ &\quad \times v_s(k)v_s^T(k)(I - \mu X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k))\} \\ &+ \mu E\{(I - \mu X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)) \\ &\quad \times v_s(k)z_s^T(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)\} \\ &+ \mu E\{X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}z_s(k)v_s^T(k) \\ &\quad \times (I - \mu X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k))\} \\ &+ \mu^2 E\{X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}z_s(k)z_s^T(k) \\ &\quad \times [X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)\} \end{aligned} \tag{10}$$

식()의 우측 변 마지막 항은 [3]의 가정3에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &\mu^2 E\{X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}z_s(k)z_s^T(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)\} \\ &= \mu^2 E\{X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}E\{z_s(k)z_s^T(k)\} \\ &\quad \times [X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)\} \\ &= \mu^2\sigma_z^2 E\{X(k)E\{[X^T(k)X(k)]^{-1}\} \\ &\quad \times E\{[X^T(k)X(k)]^{-1}\}X^T(k)\} \\ &= \frac{\mu^2\sigma_z^2 P_s}{N_s^2 M\sigma_u^2} I_N \end{aligned} \tag{11}$$

[3]의 가정3에 의해 식(10의 우측 변 두 번째 항과 세 번째 항은 제거가 가능하다.

식(11)의 첫 번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} &E\{(I - \mu X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)) \\ &\quad \times v_s(k)v^{T_s}(k)(I - \mu X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k))\} \\ &= E\{v_s(k)v^{T_s}(k)\} \\ &\quad - \mu E\{v_s(k)v^{T_s}(k)X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)\} \\ &\quad - \mu E\{X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)v_s(k)v^{T_s}(k)\} \\ &\quad + \mu^2 E\{X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)v_s(k)v_s^T(k)X(k) \\ &\quad \times [X^T(k)X(k)]^{-1}X^T(k)\} \end{aligned} \tag{12}$$

식 (12)의 첫 번째 항은 $E\{v(k)v^T(k)\} = K(n)$이고 두 번째 항과 세 번째 항은 [3]의해 각각 $\frac{P_s}{N_s}\mu K(k)$임을 알 수 있다. 또한 마지막 항은 [4]에서 고차 통계적 특성을 갖는 랜덤 프로세스의 해석법을 적용하면 다음과 같이 정리 가능하다.

$$\begin{aligned} &\mu^2 E\{X(k)[X(k)X^T(k)]^{-1}X^T(k)v_s(k)v_s^T(k) \\ &\quad \times X(k)[X(k)X^T(k)]^{-1}X^T(k)\} \\ &= \frac{\mu^2 P_s}{MN_s^2} tr[K(k)] I_N \end{aligned} \tag{13}$$

위의 결과로부터 $tr[K(k+1)]$을 구하면 다음과 같이 정리 가능하다.

$$K(k+1) = K(k) - 2\alpha\mu K(k) + \beta\mu^2 tr[K(k)]I + \tau\mu^2 I \tag{14}$$

여기서 $\alpha = \frac{P_s}{N_s}$, $\beta = \frac{P_s}{MN_s^2}$, $\tau = \frac{\sigma_z^2 P_s}{MN_s^2\sigma_u^2}$

식(14)에 대각합(trace)을 취하면 다음과 같이

쓸 수 있다.

$$tr[\boldsymbol{K}(k+1)] = (1-2\alpha\mu+N\beta\mu^2)tr[\boldsymbol{K}(k)] + N\gamma\mu^2 \quad (15)$$

식(15)는 닫힌 식(closed form)으로 간단한 연산으로 다음과 같이 정리된다.

$$tr[\boldsymbol{K}(k)] = \psi^k tr[\boldsymbol{K}(0)] + N\gamma\mu^2 \sum_{l=0}^{k-1} \psi^l \quad (16)$$

여기서 $\psi = 1-2\alpha\mu+N\beta\mu^2$이고 $tr[\boldsymbol{K}(0)] = \boldsymbol{v}^T(0)\boldsymbol{v}(0)$이다.

식(16)에 위의 결과를 대입하면 SAP의 MSE를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J(k) = P_s\sigma_u^2\psi^k\, tr[\boldsymbol{K}(0)] + P_s N\gamma\sigma_u^2\mu^2 \sum_{l=0}^{k-1} \psi^l + P_s\sigma_z^2 \quad (17)$$

식(17)이 수렴할 조건은 $|\psi| < 1$이므로 적응이득 파라미터의 범위는 $0 < \mu < 2$이다.

III. 결 론

본 논문은 다중제한조건을 갖는 SAP 알고리즘의 수렴성능 해석방법을 제시하였다. 해석 결과로부터 SAP 알고리즘의 MSE는 부밴드 수가 증가함에 따라 감소함을 알 수 있으며 또한 적응이득 파라미터의 범위가 $0 < \mu < 2$이며 수렴성능 향상을 위해 수렴상태에 따른 μ의 조정이 필요함을 유추할 수 있다.

Acknowledgment

본 연구는 지식경제부(정보통신연구진흥원), 부산광역시 및 동의대학교와 중소기업 산학협력 개발 지원 상업의 지원을 받아 수행된 연구결과임.(08-기반-13, IT특화연구소:"부산IT융합부품연구소"설립 및 운영)

참고문헌

[1] S. Haykin, *Adaptive Filter Teory,* 4th Ed, NJ: Prentice-Hall, 2002.

[2] H. Choi and H. D. Bae, "Subband affine projection algorithm for acoustic echo cancellation system," Eurasip Jour. on ASP, vol. 2007, Article ID 75621, doi: 10.1155/2007/75621, 2007.

[3] 김영민, 최 훈, "MPDSAP 적응필터를 위한 MSE의 통계적 해석", 해양정보통신학회, 2009

[4] K. A. Lee, W. S. Gan, and S. M. Kuo, "Mean-Sqaure performance analysis of the normalized subband adaptive filter", pp.248-252, Nov. 2006