

---

## 효과적인 수학 그래프 저작 시스템

### Effective Graph Drawing Tool for Mathematics Education

오영택, Young-Taek Oh\*, 김용준, Yong-Jun Kim\*\*, 김명수, Myung-Soo Kim\*\*\*

---

**요약** ~ 본 논문에서는 수학 교육을 위한 실시간 그래프 저작 시스템을 제안한다. 사용자는 대략적인 스케치를 통해 의도하는 그래프를 쉽게 그릴 수 있으며 실제 수학 교육에서 필요한 부가적인 정보 역시 쉽게 포함시킬 수 있다. 이와 더불어, 본 논문에서는 복잡한 그래프를 쉽게 그리기 위해 이미 그려져 있는 그래프 중 현재 그리고 있는 그래프와 가장 유사한 그래프를 찾아서 후보로 제시하는 방법을 제안한다.

↓

**Abstract** ~ We present a real-time graph drawing tool for mathematics education. We developed a sketch-based graph drawing interface that recognizes the schematic sketch of a graph. Our system generates figures displaying useful supplementary information such as auxiliary lines, abscissas, and ordinates. The resulting graphs are very similar to the graphs commonly found in textbooks. We also developed a graph retrieval system that makes rapid graph drawing feasible.

↓

**핵심어:** *Mathematics Education, Sketch-based Interface, Graph Drawing*

---

본 논문은 2008년도 두뇌한국사업(BK21)에 의해 지원되었음.

\*주저자 : 서울대학교 컴퓨터공학부 3차원 모델링 및 프로세싱 연구실; e-mail: [ytoh@3map.snu.ac.kr](mailto:ytoh@3map.snu.ac.kr)

\*\*공동저자 : 서울대학교 컴퓨터공학부 3차원 모델링 및 프로세싱 연구실; e-mail: [kjy24182@3map.snu.ac.kr](mailto:kjy24182@3map.snu.ac.kr)

\*\*\*교신저자 : 서울대학교 컴퓨터공학부 교수; e-mail: [mskim@snu.ac.kr](mailto:mskim@snu.ac.kr)

## 1. 서론

수학 교육에서 그래프를 이용한 의사 소통 방법은 가장 효과적인 방법들 중 하나이다. 어떤 함수의 극대, 극소, 변곡점과 같은 개념을 설명하는 과정에 있어서, 그래프를 그리지 않고는 학생들의 직관적인 이해를 유도하는 것이 거의 불가능하다. 수학 수업을 하는 동안 선생님들이 매일 많은 그래프를 그려가며 강의를 진행 하지만, 사실 이러한 과정은 시간이 많이 걸림과 동시에 매우 성가신 일이기도 하다. 게다가 정교한 그래프를 그리는 데는 상당히 많은 경험이 필요하다.

컴퓨터 활용능력이 어느 정도 요구되는 e-Learning 과 같은 수업 환경에서는 이러한 상황이 더욱 심각하다. 일부 교사들은 시험 문제를 만들거나 문제집을 편집 할 때 CorelDRAW™ 와 같은 소프트웨어를 이용하여 정교한 그래프를 그리기도 하지만 이러한 도구들의 사용법을 익히는데도 상당히 많은 시간이 들뿐만 아니라 도구의 사용법을 안다고 하더라도 원하는 그림을 빠른 시간 내에 그리기는 용이하지 않다. Maple™ 이나 Mathematica™ 와 같은 CAS (Computer Algebra System) 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프를 그릴 수도 있지만, 이러한 기존의 시스템들을 이용하여 그래프를 그리는데 있어서는 실제 수업에 사용할 때 필요한 추가적인 정보를 표현하기가 쉽지 않다.

최근 컴퓨터 기술의 급속한 발전과 함께 수학 교육에 컴퓨터를 이용한 최신 기술들을 도입하려는 시도들이 활발하게 진행되어 왔다. Maple™ 이나 Mathematica™ 와 같은 CAS 소프트웨어를 실제 교육에 사용하여 그 효과를 알아보는 연구는 오래 전부터 시도되었고 [1], 펜/스케치 인터페이스에 대한 연구가 진행되면서 이를 교육에 적용하려는 연구들 또한 많이 시도되었다 [2, 3].

본 논문에서는 수학교육을 위한 효과적인 그래프 저작 도구를 제안한다. 본 논문에서 제안하는 시스템은 스케치 인터페이스를 사용하여 사용자가 시스템에 대한 사전 지식이 없더라도 쉽고 빠르게 원하는 그래프를 얻을 수

있게 해 준다. 또한 현재 그리고 있는 그래프와 유사한 그래프를 시스템이 자동으로 데이터베이스에서 검색하여 사용자에게 제안해 줌으로써 복잡한 그래프를 약간의 수정을 통해 쉽게 그릴 수 있도록 해 준다.

본 논문의 구성을 다음과 같다. 제 2 절에서는 본 연구와 관련된 이전연구에 대하여 간단하게 살펴본다. 제 3 절에서는 본 연구에서 제안하는 시스템의 스케치 기반 인터페이스에 대해 설명한다. 제 4 절에는 시스템의 그래프 제안 기능을 소개하고, 마지막으로 제 5 절에서 본 논문의 결론을 맺는다.

## 2. 관련 연구

Maple™ 이나 Mathematica™ 와 같은 CAS 프로그램을 수학교육에 도입하려는 많은 시도가 있었다. 하지만 이러한 프로그램의 인터페이스는 그림을 칠판에 직접 그리는 과정에 비하여 그리 직관적이지 못하다. 사용자들은 그래프의 개략적인 형태를 그리는 것과 같이 직관적인 방법이 아니라 표 1 에서 주어진 예제들과 같이 복잡한 명령어를 입력해야 하며 평면곡선의 점근선이나 점의  $x, y$  좌표와 같은 추가적인 정보를 표시하려면 더 많은 명령어를 입력해야 한다.

Maple™	<code>plot(x^2-4*x+7);</code>
Mathematica™	<code>Plot[x^2-4*x+7, {x,-10,10}]</code>
Matlab™	<code>x=-10:1:10; y=x^2-4*x+7; plot(x,y);</code>
Gnuplot	<code>plot x*x-4*x+7</code>

표 1. 함수  $y = x^2 - 4x + 7$  을 그리기 위한 명령어들

본 논문에서 제안하는 시스템의 주요 기능중의 하나가 바로 스케치 기반 인터페이스이다. 이러한 스케치 기반의 사용환경은 많은 응용프로그램들에서[3]-[6] 광범위하게 사용되어 왔으며 교육에 도입하려는 시도도 많이 이루어져 왔다. 박천현 등 [7]은 교실환경에 적합한 많은 기능을 갖춘 CSEE(Communication System for Electronic Education)를 제안하였다. CSEE 의 2D Modeler 를

이용하여 사용자는 포물선, 쌍곡선, 타원과 같은 2D 그래프를 쉽게 그릴 수 있다. LaViola 와 Zeleznik[2]의 MathPad<sup>2</sup> 는 스케치 인터페이스를 기반으로 한 직관적인 문제풀이와 이를 시각화하는 기능을 제공한다. MathPad<sup>2</sup> 가 손으로 쓴 수식의 역동적인 시각화에 초점을 맞춘 반면 본 논문에서 제안하는 시스템은 CSEE 의 2D Modeler 기능을 확장하여 정확한 그래프를 보다 빠르고 쉽게 그리는 데 초점을 맞추었다. 사용자는 명령어를 복잡하게 입력하지 않고도 그래프의 개략적인 형태를 스케치하여 함수의 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.

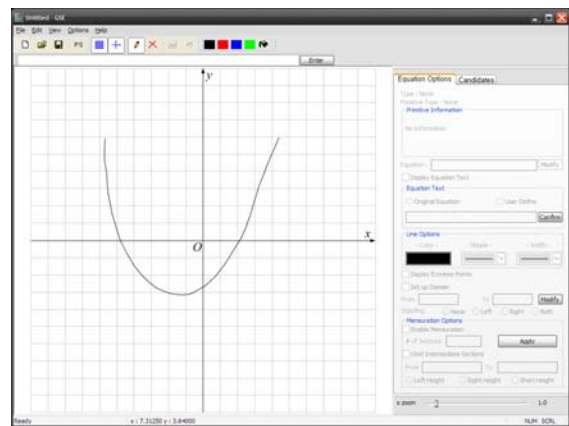
기존의 소프트웨어 패키지들은 많은 기능들을 제공하고 있지만 교재제작이나 학교수업에서 직접 활용할 수 있는 기능은 그리 많지 않다. 이는 기존의 소프트웨어들이 주로 공학이나 자연과학 분야의 연구에서 활용하기 위해 개발되었기 때문이다. 반면에 Pedagoguer 의 GraphEq™ 는 교육분야에서의 응용을 위하여 개발되었다. GraphEq™ 는 종이에 수식을 쓰는 것과 유사한 인터페이스를 제공하며 편리하게 부등식의 영역을 표시하는 기능을 가지고 있다. 하지만 GraphEq™ 의 인터페이스는 키보드와 메뉴에 기반을 두고 있어서 스케치 기반의 인터페이스에 비하여 직관적이지 못하다는 단점이 있다. 게다가 다양한 부가 정보들을 표시하는 과정이 매우 불편하다. 본 논문에서 제안하는 시스템은 스케치기반의 인터페이스뿐만 아니라 접선이나 점의 좌표, 점근선과 같은 부가정보들을 쉽게 표현할 수 있는 기능을 제공한다.

본 논문에서 제안하는 주요기능 중의 하나는 그래프 검색 기능이다. 본 시스템은 사용자의 스케치를 입력으로 받아서 이와 유사한 그림들을 데이터베이스로부터 자동으로 검색하여 찾아내고, 이 중에서 사용자가 원하는 그림을 쉽게 선택할 수 있도록 보여준다. 2D 그래프 검색[8], 내용기반 3D 검색[9]–[11], CAD 데이터베이스 검색[12] 등에서 이러한 검색기능에 대한 연구를 찾아 볼 수 있다. 우리의 시스템은 그래프 검색을 통하여 스케치와 비슷한 후보들을 추천하고 그 중에서 사용자가 원하는 것과 가장 유사한 그래프를 선택하고 약간의 수정을 거쳐 원하는 최종

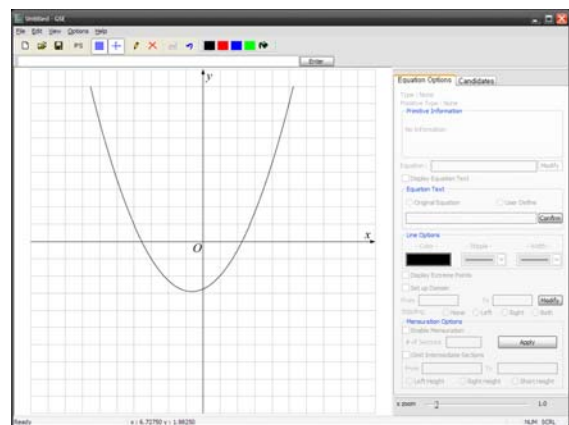
결과를 쉽게 얻도록 한다. 따라서 복잡한 그래프를 그리는 데 드는 시간을 획기적으로 줄일 수 있다.

### 3. 스케치 기반 그래프 드로잉

그래프를 그리는 데 있어서 가장 중요한 요소는 그리고자 하는 그래프의 특징이다. 예를 들어, 2 차 함수의 경우 그래프는 위로 볼록이거나 아래로 볼록인 모습이다. 또한 3 차 함수의 경우 이 그래프는 보통 2 개의 극점을 가진다. 이러한 함수의 특징을 이용하여 사용자는 원하는 그래프를 빠른 시간 내에 직관적으로 그릴 수 있다 [그림 1].



(a)



(b)

그림 1. (a) 원하는 그래프 개략적인 형태의 스케치; (b) 사용자의 스케치가 함수 그래프로 변환된 결과

본 시스템에서는 이러한 그래프의 특징을 사용자의 제스처 인식에 사용하였다. 본 연구에서 사용하는 제스처 집합은 아래의 [표 2]와 같다.






Name	Example	Function	Equation
Line		Draw a line	$y = a \cdot x + b$
Quadratic		Draw a quadratic function	$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
Cubic		Draw a cubic function	$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
Ellipse		Draw an ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hyperbola		Draw a hyperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ or } -1$

표 2. 제스처 집합

사용자의 스케치로부터 제스처 정보를 얻기 위해서는 스케치데이터를 일정한 간격으로 다시 샘플링해야 한다. 데이터를 다시 샘플링 하는 과정에서 불필요한 점들을 제거하고 점들이 고루 분포하도록 한다. 그 이후 스케치 데이터와 유사한 그래프들을 후보로 생성하고 그 각각의 후보에 대하여 스케치데이터와의 오차를 계산한다. 이 중에서 오차가 가장 작은 후보를 결과로 택한다.

제스처를 이용하여 그래프의 원형을 그린 후에 사용자는 그래프의 부가적인 정보들을 몇 번의 클릭으로 쉽게 입력할 수 있다. 점의 좌표, 접선, 함수의 범위 제한, 점근선, 구분구적법 등등 중등 교과과정에서 소개되는 수학개념들은 모두 표현이 가능하다.

#### 4. 후보 그래프 제안 인터페이스

스케치를 이용해서 2 차 혹은 3 차 그래프를 그리는 과정만으로는 복잡한 그래프를 빠르게 그리는 데 한계가 있다. 수학 선생님이 수업 중에 그래프를 그리는 과정을 살펴보면 기본이 되는 그래프를 하나 그려놓고 필요에 따라 약간의 수정을 가해서 그래프를 그린다는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 이 점에 착안하여 현재 그리고 있는 그래프와 유사한 그래프를 미리 그려진 그래프들 중에서 선택하여 후보로 제안함으로써 복잡한 그래프도 단시간에 그릴 수 있는 인터페이스를 제안한다 [그림 2].

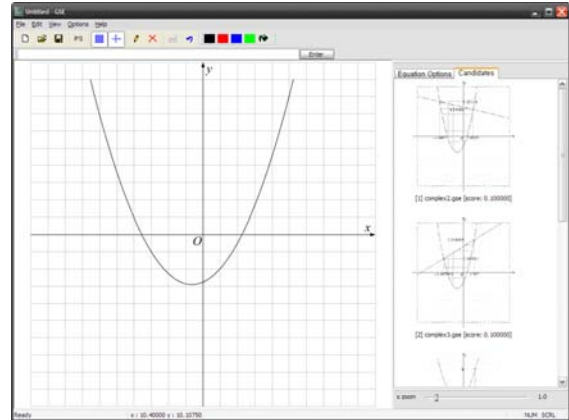


그림 2. 현재 그리고 있는 함수와 가장 비슷한 후보 그래프들이 보조 창에 제안된 모습

후보 그래프를 제안하기 위해서는 두 그래프간의 유사도를 비교할 수 있는 기준이 필요하다. 본 시스템은 두 그래프  $A$  와  $B$  의 유사도를 아래와 같이 정의한다.

$$D(A, B) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot d_i(f_A, f_B).$$

여기서  $w_i$  는 가중치,  $d_i$  는 유사도 함수, 그리고  $f_A, f_B$  는 각각 그래프의 특성 벡터를 나타낸다. 특성 벡터는 다음과 같은 정보를 포함한다: 수식의 타입, 최고차항의 계수,  $x, y$  절편의 개수, 극점의 개수.

그래프를 비교할 때 특성 벡터의 각 정보에 대해서 0~1 사이의 점수를 매긴다. 수식 타입의 경우 수식의 타입이 같고 최고차항의 부호가 같은 경우 0 이고 그 외의 경우는 1 이다.  $x, y$  절편의 개수는 두 그래프의  $x, y$  절편의 수를 각각 계산하여 그 차이 값을 구한 뒤에 그 값을 0 에서 1 사이 값으로 정규화 시킨다. 극점의 개수도 마찬가지로 두 그래프의 차이 값을 계산하여 정규화 시킨다. 최종적으로 각 정보에 대한 가중치를 곱하여 유사도를 결정한다.

그래프가 하나 이상의 수식으로 이루어져 있을 경우에는 두 그래프에 있는 수식들 중에서 가장 유사한 수식끼리 짝을 지어 비교하는 것이 중요하다. 이를 위해서 모든 가능한 수식 쌍의 유사도를 비교하여 이 중에서 유사도가

가장 높은 쌍을 이룬다. 두 그래프의 유사도는 이들 수식 쌍들의 유사도의 합으로 결정된다.

위에서 정의한 유사도를 바탕으로 사용자의 스케치 입력이 들어오면 해당 입력과 데이터베이스에 저장된 그림간의 유사도를 계산한 뒤 유사도 순으로 정렬하여 가장 유사도가 높은 그림들을 후보로 추천한다.

## 5. 결론

본 논문에서 제안하는 시스템은 수학 교육에서 사용되는 그래프를 스케치를 통하여 직관적으로 그릴 수 있도록 하며 수학교육에 필요한 다양한 부가정보를 쉽게 표현할 수 있게 한다. 또한 후보 그래프를 제안하는 인터페이스를 이용하여 복잡한 그래프도 약간의 수정만으로 빠르게 그릴 수 있는 기능을 제공한다. 이러한 그래프 저작 시스템은 현직 교사들이 컴퓨터를 이용하여 그래프를 그리는데 유용하게 사용될 수 있으며 차후 전자 칠판 등에 응용되어 효과적인 수학교육공학의 활성화에 크게 기여할 수 있을 것이다.

## 참고문헌

[1] P. Ramsden, "Mathematica in Education: Old Wine in New Bottles or a Whole New Vineyard," *Innovation in Mathematics: Proc. of the Second International Mathematica Symposium*, pp 419-426, 1997.

[2] Jr. Joseph, J. LaViola and Robert C. Zeleznik, "Math Pad2: A System for the Creation and Exploration of Mathematical Sketches," *In SIGGRAPH '04: ACM SIGGRAPH 2004 Papers*, pp 432-440, 2004.

[3] T. P. Moran, P. Chiu, and W. Melle, "Pen-based Interaction Technique for Organizing Material on an Electronic Whiteboard," *Proc. of the 10th Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology*, 1997, pp 45-54.

[4] T. Igarashi, S. Matsuoka, and H. Tanaka, "Teddy: a Sketching Interface for 3D Freeform Design," in *SIGGRAPH '99: Proc. Of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 1999, pp. 409-416

[5] E. D. Mynatt, T. Igarashi, W. K. Edward, and A. LaMarca, "Flatland: New Dimensions in Office Whiteboards," in *CHI '99: Proc. Of the SIGCHI conference on Human Factors in Computing systems*, 1999, pp. 346-353.

[6] C. H. Damm, K. M. Hansen, and M. Thomsen, "Tool Support for Cooperative Object-Oriented Design: Gesture Based Modelling on an Electronic Whiteboard," in *CHI '00: Proc. Of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems, 2000*, pp. 518-525

[7] C.-H. Park, C.-Y. Choi, T.-K. Kim, Y.-T. Oh, M.-S. Kim, "CSEE: Communication System for Electronic Education," in *The 8<sup>th</sup> Distance Learning and the Internet Conference*, Bangkok, Thailand, December 12-15 2007.

[8] B. Huet and E. R. Hancock, "Inexact Graph Retrieval," *Content-Based Access of Image and Video Libraries*, pp. 40-44, 1999.

[9] J. Loffler, "Content-based Retrieval of 3D Models in Distributed Web Databases by Visual Shape Information," *Proc. Of 4<sup>th</sup> Intl. Conf. on Information Visualisation*, pp. 82-87, 2000.

[10] K. Moustakas, G. Nikolakis, D. Tzovaras, S. Carbini, O. Bernier, and J. E. Viallet, "3D Content-based Search using Sketches," in *Artificial Intelligence Applications and Innovations*, vol. 204/2006, 2006, pp.361-368.

[11] K. Lou, S. Prabhakar, and K. Rmani, "Content-based Three Dimensional Engineering Shape Search", in *Proc. Of the 20<sup>th</sup> International Conference on Data Engineering*, 2004, pp. 754-765,

[12] S. K. Gupta, A. Cardone, and A. Deshmukh, "Content-Based Search Techniques for Searching

CAD Databases,” *Computer-Aided Design & Applications*, vol. 3, no. 6, pp. 811–819, 2006.