



유한요소법을 이용한 level set 공식화의 해석

최형권*¹

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF LEVEL SET FORMULATION

H.G. Choi*¹

In the present study, a least square weighted residual method and Taylor-Galerkin method were formulated and tested for the discretization of the two hyperbolic type equations of level set method; advection and reinitialization equations. The two approaches were compared by solving a time reversed vortex flow and three-dimensional broken dam flow by employing a four-step splitting finite element method for the solution of the incompressible Navier-Stokes equations. From the numerical experiments, it was shown that the least square method is more accurate and conservative than Taylor-Galerkin method and both methods are approximately first order accurate when both advection and reinitialization phase are involved in the evolution of free surface.

Key Words : 레벨셋 방법 (Level Set Method), 이송방정식 (Advection Equation), 재초기화 (Reinitialization), 최소사승가중잔류법 (Least Square Weight Residual Method), 테일러-갤러킨 방법(Taylor-Galerkin Method)

1. 서 론

본 논문에서는 다상유동의 수치해석 기법으로 지난 20여년간 매우 많은 연구자들에 의해서 사용되어져 온 level set 공식화[1]의 유한요소 해석 방법론에 대하여 논의하고자 한다. Level set 공식화는 해석하고자 하는 level set 함수의 수학적 성질의 장점 때문에 많은 연구자들에 의해서 연구되어 왔으나 주로 유한 차분법 또는 최근에는 유한 체적법을 이용한 해석이 주를 이루었다[1-3]. 반면에 level set 공식화에서 해석하고자 하는 방정식의 쌍곡선형 특성 때문에 유한요소법을 이용한 level set 공식화의 해석은 유한 차분법의 그것에 비해서 활발하지 못한 편이었다. 따라서, 최근들어 연구들이 진행되고는 있으나 발표된 논문 수도 비교적 제한되어 있는 형편이다[4-6]. 따라서, 본 논문에서는 책임 저자의 그룹에서 지난 몇 년 간 유한요소법을 활용하여 level set 공식화를 해석한 예들을 공식화와 함께 소개하고자 한다.

사용한 주된 유한요소공식화는 level set 공식화의 advection 방정식과 reinitialization 방정식의 해석에 중점을 두고 설명하

고자 한다. Advection 방정식과 reinitialization 방정식은 쌍곡선형 형태의 방정식으로 유한요소 이산화를 위해서는 기존의 Galerkin 공식화를 수정한 특별한 형태의 유한요소 공식화가 요구된다. 본 연구에서는 그 두 개의 쌍곡선형 방정식의 해석을 위하여 Taylor-Galerkin 방법과 least square weighted residual 방법을 적용하고자 한다. 두 가지 수치해석 방법을 두 개의 쌍곡선형 방정식에 적용한 유한요소공식화를 유도하고, 각각의 수치해석 방법의 특성을 설명하고자 한다. 또한, 수치 해석 결과의 비교를 통하여 유한요소 공식화의 level set 공식화에의 적용 가능성을 고찰해 보고자 한다.

본 논문의 2장에서는 level set 공식화의 advection 방정식과 reinitialization 방정식의 유한요소 수치해석 방법론에 대하여 Taylor-Galerkin 방법과 least square weighted residual 방법을 적용하여 설명한다. 각각의 수치 기법이 가지는 특성에 대하여 고찰하며 3차원 확장 가능성을 고찰한다. 3장에서는 수치해석 결과로 속도장이 주어진 다양한 level set 공식화의 표준예제들을 해석하여 적합한 유한요소 공식화를 제시한다. 마지막으로, 3차원 붕괴 댐 문제의 해석 결과를 제시한다. 해석된 결과는 기존의 실험결과와 비교한다. 마지막으로 4장에서는 결론을 유도한다.

¹ 정회원, 서울산업대학교 기계공학과

* E-mail: hgchoi@snu.ac.kr



2. 수치해석 방법

2.1 Level set 유한요소 해석의 지배방정식

비압축성 유동장의 자유표면 거동을 해석하기 위하여 사용된 level set 지배방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\rho(\phi) \frac{Du}{Dt} = \nabla p + \nabla \cdot (2\mu(\phi)D) - \sigma\kappa(\phi)\delta(\phi)\nabla\phi + \rho(\phi)\vec{g} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

식 (1)은 4단계 분리 유한요소법을 이용하면 다음과 같은 식들을 풀게 된다.

$$\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\hat{u}_j \hat{u}_{i,j} - u_j^n u_{i,j}^n) = -\frac{1}{\rho(\phi)} p_{,i} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^n)_{,j} + S_i$$

$$\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} = \frac{1}{\rho(\phi)} p_{,i}^n$$

$$p_{,ij}^{n+1} = \frac{\rho(\phi)}{\Delta t} u_{i,i}^*$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho(\phi)} p_{,i}^{n+1} \quad (2)$$

식 (2)의 유한요소 공식화에 대한 자세한 설명은 참고문헌 [7]으로 대신한다. 식 (2)를 풀어서 자유표면을 가지는 유동장의 속도장을 구한 다음에는 아래와 같은 level-set 함수에 대한 이송 방정식을 풀어서 상경계면을 갱신한다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (t > 0) \quad \text{with } \phi(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\phi}_0(\mathbf{x}) \quad (3)$$

위의 식 (3)을 풀어서 상경계면이 갱신된 후에는 다음의 reinitialization 방정식을 풀어서 level set 함수가 거리의 함수가 되도록 재지정하여야 한다.

$$\phi_\tau + S(\phi_0)(|\nabla \phi| - 1) = 0 \quad (4)$$

위의 식 (4)는 아래와 같은 식으로 변경이 가능하다.

$$\phi_t + \mathbf{c} \cdot \nabla \phi = S(\phi_0) \quad (5)$$

여기서 \mathbf{c} 와 $S(\phi_0)$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{c} = S(\phi_0)(\nabla \phi / |\nabla \phi|) \quad (6)$$

$$S(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + \epsilon^2}} \quad (7)$$

이제, 다음 절에서는 식 (3)과 식 (5)의 유한요소 해석을 이용한 공식화에 대하여 논의한다.

2.2 이송방정식의 유한요소 공식화

먼저, level set 함수의 이송방정식인 식 (3)의 최소자승가중 잔류법을 이용한 공식화를 유도한다. 식의 유도를 위해서는 식 (3)의 잔류를 다음과 같이 Crank-Nicolson 방법을 이용하여 정의하는 것이 필요하다.

$$R(\phi^{n+1}) = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \phi^{n+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \phi^n \quad (8)$$

한편, 식 (8)에서 다음과 같이 수정된 가중함수가 정의된다.

$$\tilde{w} = \frac{\partial R}{\partial \phi^{n+1}} = \frac{w}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla w \quad (9)$$

이제, 수정된 가중함수 (9)를 이용하면 다음과 같이 이송방정식에 대한 최소자승 가중잔류법을 이용한 공식화가 얻어진다.

Given a velocity field

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \text{at } t = t^{n+1}, \quad \text{find } \phi^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \sum_j \phi_j^{n+1} w_j \in H^1$$

such that

$$\int_\Omega (w + \Delta t \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla w)(\phi^{n+1} + \Delta t \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \phi^{n+1}) d\Omega = \int_\Omega (w + \Delta t \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla w)(\phi^n - \Delta t \frac{1}{2} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \phi^n) d\Omega$$

$$\text{for all } w = \sum_t \alpha_t w_t \in H^1 \quad (10)$$

한편, Taylor-Galerkin 방법을 이용한 식 (3)의 유한요소 공식화를 위해서는 먼저 식 (3)과 Taylor-series 전개를 이용하여



다음의 두 식을 정의한다.

$$\phi_t = -(\vec{u} \cdot \nabla)\phi, \quad \phi_{tt} = -(\vec{u} \cdot \nabla)\phi_t \quad (11)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \phi_t + \frac{\Delta t^2}{2} \phi_{tt} + \dots \quad (12)$$

위의 식 (11)을 식 (12)에 대입하여 정리하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} &\phi^{n+1} + \Delta t u_i^{n+1} \phi_i^{n+1} \\ &- \frac{\Delta t^2}{2} u_i^{n+1/2} (u_j^{n+1/2} \phi_{j,i}^{n+1})_{,i} = \phi^n \end{aligned} \quad (13)$$

마지막으로, 식 (13)에 발산 정리를 적용하면 이송방정식에 Taylor-Galerkin 방법을 적용한 다음의 최종적인 유한요소 공식화가 얻어진다.

$$\begin{aligned} &\int [w \phi^{n+1} + \Delta t w u_i^{n+1} \phi_i^{n+1}] d\Omega \\ &+ \Delta t^2 / 2 \int [\overline{u_i u_j} w_{,i} \phi_{,j}] d\Omega \\ &+ \int w \overline{u_i n_i} u_{i,j} \phi_{,i} d\Gamma = \int w \phi^n d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)와 (10)을 비교하면, 식 (10)에는 경계조건 항이 나타나지 않는 점에 주목한다.

2.3 Reinitialization 방정식의 유한요소 공식화

이 절에서는 식 (5)의 유한요소 공식화에 대하여 설명한다. 먼저, 최소사승가중잔류법을 이용한 공식화를 유도하기 위하여 식 (5)의 잔류로부터 다음과 같이 수정된 가중함수의 유도가 가능하다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R(\phi^{m+1})}{\partial \phi^{m+1}} \\ &= w_i \\ &= \frac{\partial \left(\frac{\phi^{m+1} - \phi^m}{\Delta \tau} + \mathbf{c} \cdot \nabla \phi^{m+1} - S(\phi_0) \right)}{\partial \phi_i^{m+1}} \\ &= \frac{w_i}{\Delta \tau} + \mathbf{c} \cdot \nabla w_i \end{aligned} \quad (11)$$

위의 식 (11)을 이용하면 reinitialization 방정식에 대한 최소사승가중잔류법을 이용한 공식화는 다음과 같이 서술된다.

Given a level set field

$$\phi_0(\mathbf{x}, t^{n+1}) \text{ at } t = t^{n+1}, \text{ find } \phi^{m+1}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_j \phi_j^{m+1} w_j \in H^1$$

such that

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (w_i + \Delta \tau \mathbf{c} \cdot \nabla w_i)(\phi^{m+1} + \Delta \tau \mathbf{c} \cdot \nabla \phi^{m+1}) d\Omega = \\ &\int_{\Omega} (w_i + \Delta \tau \mathbf{c} \cdot \nabla w_i)(\phi^m + \Delta \tau S(\phi_0)) d\Omega \end{aligned}$$

$$\text{for all } w = \sum_i \alpha_i w_i \in H^1. \quad (12)$$

이전의 유한요소 공식화를 이용한 선행연구들과 비교하여 식 (12)의 중요한 특징은 유한요소 공식화로부터 경계조건 항이 나타나지 않는다는 점이다. 이는 특히, 3차원의 복잡한 형상 주위의 유동장의 해석에서 큰 이점을 가진다 한편, 식 (5)의 Taylor-Galerkin 방법을 적용한 최종적인 유한요소 공식화는 2.2 절에서 제안된 유사한 방법을 적용하면 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} &\int [\phi^{n+1} + \Delta t c_j^{n+1} \cdot \phi_{,j}^{n+1} + \Delta t^2 / 2 w_{,j} \phi_{,j}] d\Omega \\ &= \int [\phi^n + \Delta t s_0] d\Omega + \int w \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

3. 수치해석 결과

이 장에서는 앞 장에서 제시된 수치 기법을 활용하여 개발된 코드를 사용하여 얻은 결과를 제시한다. 먼저, 연속방정식을 만족하는 기지의 속도장이 주어진 level set 표준예제를 해석하여 제안된 수치 기법의 정확도를 파악한다.

3.1 Time reversed single vortex 문제의 해석

제안된 수치 기법의 수치확산 오차 및 위상 오차를 고찰하기 위한 대표적인 문제로 2차원 time reversed single vortex 문제를 해석한다. 이 문제의 경우 속도장은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u &= -\sin^2(\pi x/100) \times \sin(\pi y/50) \times \cos(\pi t/T) \\ v &= \sin(\pi x/50) \times \sin^2(\pi y/100) \times \cos(\pi t/T) \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)에서 주어진 와류 속도장에 의하여 원형 유체는 긴 꼬리를 가지는 유체로 늘어지게 된 후에 한 주기 후에는 다시 원래 상태로 돌아오게 되어야 한다. 하지만, 수치 확산이나 위상 오차에 의해서 그 위치가 달라지거나 원형 유체의

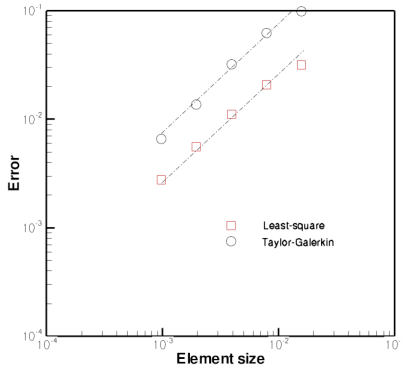


Fig. 1 Errors of level set function after one period for various grid resolutions

크기가 변하게 된다. 본 연구에서는 수치 확산과 위상 오차를 모두 고려할 수 있는 다음의 식을 사용하여 오차를 측정하였다.

$$Error = \sqrt{\frac{\sum_{|\phi| < \epsilon} \{(\phi_{num} - \phi_{exact})/R\}^2}{M}} \quad (15)$$

본 논문의 문제에서 주기는 비교적 긴 8 초를 적용하였으며, 식 (15)에서 M은 level set 함수의 값이 2h 보다 작은 절점들의 개수를 나타내며 R은 원의 반지름을 나타낸다. 즉, 오차는 상경계면 주위의 절점들에 대해서만 정의가 되며, level set 함수의 값은 반지름 R에 의하여 무차원된 값을 사용한다. Table 1은 최소자승가중잔류법과 Taylor-Galerkin 방법을 이용한 해석 결과, 식 (15)에 의하여 정의된 오차의 비교를 나타낸다. 최소자승가중잔류법이 Taylor-Galerkin 방법에 비교하여 약 3배 정도 더 정확함을 알 수 있다. Fig. 1은 최소자승가중잔류법과 Taylor-Galerkin 방법을 이용한 해석 결과의 오차와 요소의 크기와의 관계를 나타낸다. 두 가지 방법 모두 약 1차 정확도를 가짐을 알 수 있다.

Table 1 Errors for the solution to the time-reversed single-vortex flow problem considering both dissipation and phase errors (Eqn. 11) after one period for various grid resolutions(CFL=0.5).

Grid	Least-square	Taylor-Galerkin
64 × 64	3.17E-2	9.89E-2
128 × 128	2.09E-2	6.25E-2
256 × 256	1.11E-2	3.22E-2
512 × 512	5.55E-3	1.36E-2
1028 × 1028	2.75E-3	6.66E-3

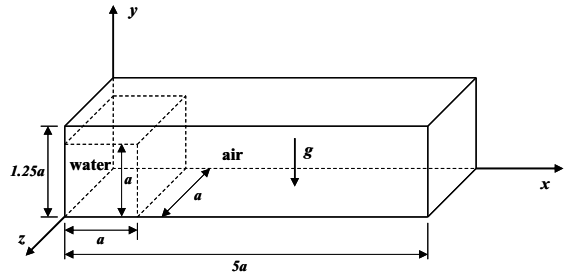


Fig. 2 Schematic for a three-dimensional broken dam problem

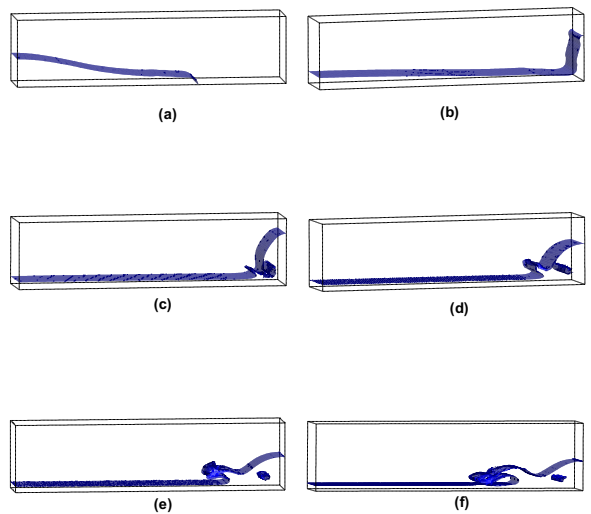


Fig. 3 Evolution of free surface of 3-D broken dam : (a) t = 2.2 s ; (b) t = 4.2 s ; (c) t = 6.0 s ; (d) t = 6.6 s ; (e) t = 7.2 s ; (f) t = 8.0 s

3.2 3차원 댐 붕괴 문제

또 다른 표준예제로 Fig. 2에 주어진 3차원 댐 붕괴 문제를 해석한다. 물의 밀도와 점성계수는 각각 1000 [kg/m³]과 1 × 10⁻³ [kg/ms]이며 공기의 밀도와 점성계수는 각각 1 [kg/m³]과 1 × 10⁻⁵ [kg/ms]이다. 중력 가속도 g = 9.8 [m/s²]이다.

댐의 붕괴를 위한 계산 영역은 Fig. 2에 주어진 바와 같이 5a × 1.25a × a이며 Martin & Moyce[8]의 실험조건과 동일한 정육면체 물기둥(a × a × a, a = 0.05715 m)을 사용한다. 특성 시간은 $t_c = \sqrt{a/g}$ 로 정의된다. Fig. 3은 시간 간격을 0.005 t_c로 하고, 200 × 50 × 40의 균일한 격자계를 사용하여 얻어진 시간에 따른 자유표면의 변화를 나타낸다. 결과는 다른 선행 연구자들의 결과와 같이 공기 주머니가 포획되는 것을 잘 보여준다. 한편, Fig. 4는 시간에 따른 자유표면 선단의 변화를 보여주는데 기존의 실험결과와 잘 일치함을 알 수 있다. Fig.

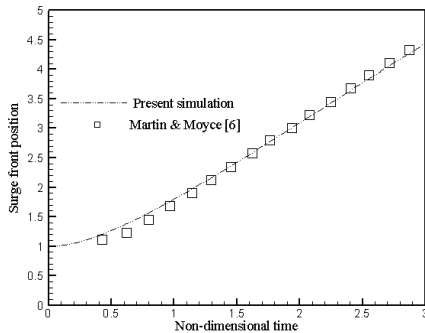


Fig. 4 Surge front position versus non-dimensional time

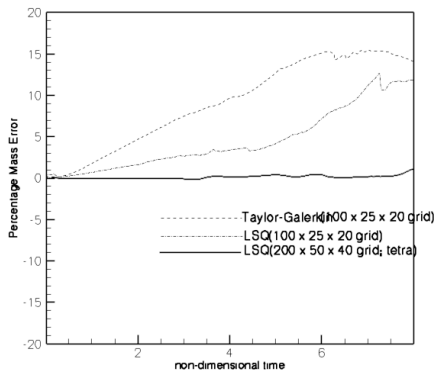


Fig. 5 Percentage mass error with non-dimensional time for the two finite element methods and grid resolutions

5는 수치 해석 방법 및 격자계의 해상도에 따른 수치해석 과정에서의 질량 오차를 나타낸다. 격자계가 적절하게 주어질 경우에 최소자승가중잔류법을 이용한 수치해석 결과는 질량을 잘 보존시킴을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 level set 공식화에서 주어지는 두 개의 쌍곡 선형 방정식, 즉, 이송 방정식과 reinitialization 방정식의 유한 요소 공식화를 제안하였다. 제안된 공식화의 수치해석 예제로 속도장이 주어진 level set 공식화의 검증을 위한 표준예제들과 3차원 붕괴 댐 문제를 해석하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 최소자승가중잔류법을 이용한 공식화가 Taylor-Galerkin 방법에 비하여 수치확산 오차가 적음을 확인하였다. 두 가지 방법 모두 표준예제의 해석 결과 격자 해상도에 따른 정확도는 이송 방정식과 reinitialization 방정식을 모두 풀 경우에 1차 정확도임을 확인하였다.

(2) 자유 수면이 breaking/merging 현상을 포함하여 매우 복잡한 거동을 보이는 문제의 해석에서 충분한 격자 해상도가 주어질 경우 최소자승가중잔류법을 이용한 공식화는 질량 보존을 비교적 잘 만족시킴을 확인하였다.

(3) 본 연구의 결과는 유한요소 공식화의 특성을 활용하여 복잡한 형상을 가지는 물체 주위의 슬래밍 현상을 포함한 자유 표면의 해석에 적용하고자 한다.

후 기

이 논문은 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2009-0079936).

참고문헌

- [1] 1994, Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., "A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol.114, pp.146-159.
- [2] 2003, Son, G., "Efficient Implementation of a Coupled Level-Set and Volume-of-Fluid Method for Three Dimensional Incompressible Two-Phase Flows," *Numer. Heat. Transfer, Part B.*, Vol.43, pp.549-565.
- [3] 2000, Sussman, M. and Puckett, E.G., "A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric Incompressible Two-Phase Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.162, pp.301-337.
- [4] 2001, Pillapakam, S.B. and Singh, P., "A Level-Set Method for Computing Solutions to Viscoelastic Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol.174, pp.552-578.
- [5] 2005, Lin, C.-L., Lee, H., Lee, T. and Weber, L.J., "A Level-Set Characteristic Galerkin Finite Element Method for Free Surface Flows," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.49, pp.521-547.
- [6] 2009, Choi, H.G., "A Least Square Weighted Residual Method of Level-Set Formulation," in preparation.
- [7] 1997, Choi, H.G., Choi, H. and Yoo, J.Y., "A Fractional Four-Step Finite Element Formulation of the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations Using SUPG and Linear Equal-Order Element Methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.117, pp.391-410.
- [8] 1952, Martin, J.C. and Moyce W.J., "An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane," *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, Math. Phys. Sci.*, Vol.244, pp.312-324.