



계면마찰항을 고려한 이상유동에서 파동전파에 대한 수치적 연구

염 금 수,^{*1} 장 근 식,² 정 문 선³

TWO-PHASE WAVE PROPAGATIONS PREDICTED BY HLL SCHEME WITH INTERFACIAL FRICTION TERMS

G.S. Yeom,^{*1} K.S. Chang² and M.S. Chung³

We numerically investigated propagation of various waves in the two-phase flows such as sound wave, shock wave, rarefaction wave, and contact discontinuity in terms of pressure, void fraction, velocity and density of the two phases. The waves have been generated by a hydrodynamic shock tube, a pair of symmetric impulsive expansion, impulsive pressure and impulsive void waves. The six compressible two-fluid two-phase conservation laws with interfacial friction terms have been solved in two fractional steps. The first PDE Operator is solved by the HLL scheme and the second Source Operator by the semi-implicit stiff ODE solver. In the HLL scheme, the fastest wave speeds were estimated by the analytic eigenvalues of an approximate Jacobian matrix. We have discussed how the interfacial friction terms affect the wave structures in the numerical solution.

Key Words : 파동전파(Wave Propagation), 이상유동(Two-Phase Flow), 이유택체모델(Two-Fluid Model), HLL 기법(HLL Scheme), 계면마찰(Interfacial Friction), Jacobian 행렬(Jacobian Matrix), 고유치(Eigenvalues)

1. 서 론

이상유동에서의 파동전파는 단상유동에 비해 그 물리적 현상이 매우 복잡하고 불확실성이 크기 때문에 이것을 수치적으로 모사하기가 매우 어렵다고 알려져 있다 이것은 이상유동이 국부 유동조건에 따라 기포류 환상류, 슬러그류와 같이 다양한 형태를 나타내며 추가적인 구성방정식의 모델에 많은 영향을 받기 때문이다. 이상유동에서의 파동전파에 대한 연구는 로켓추진시스템 원자력발전소, 석유수송관 같은 분야에서 중요하게 사용될 수 있는데 예를 들어 이상유동 배관에서 갑작스런 압력과 발생 및 전파는 기계적인 진동 및 구조물에 충격을 주며 펌프 등을 포함한 전체 시스템에 큰 피해를 줄 수 있다. 또한 단상유동과는 다르게 이상유동에서만 발생하는 기공률과의 갑작스런 전파는 구조물의 부식 등을 유발하는 것으로 알려져 있다[1].

본 논문에서는 압축성 이유택체 모델을 사용하여 액체기체 이상유동에 다양한 파동 전파 특성을 수치적으로 연구한다. 물리적으로 실제 현상에 더 가깝게 모사하기 위해서 지배방정식에 액체상과 기체상사이의 계면마찰항을 포함시켰다. 이상유동에서의 음속을 조사하기 위해서 Yeom & Chang[2]의 근사고유치 모델을 사용하여 전체 기공률 범위와 넓은 범위의 압력에 대해 계산한다. 그리고 이상유동에서의 충격파 팽창파, 접촉불연속면, 기공률파, 압력 펄스, 기공률 펄스의 전파를 이유택체 모델의 HLL 기법과 강성ODE 해법을 이용하여 수치적으로 모사하며 계면마찰항의 영향도 분석한다.

2. 압축성 이유택체 모델

본 연구에서 사용한 1차원 6-방정식 압축성 이유택체 이상유동 모델의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{H} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (1)$$

1 정회원, 한국기계연구원

2 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

3 정회원, 한국에너지기술연구원

* Corresponding author, E-mail: sori5082@naver.com



$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha_g \rho_g \\ \alpha_l \rho_l \\ \alpha_g \rho_g u_g \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_g \rho_g E_g \\ \alpha_l \rho_l E_l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha_g \rho_g u_g \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p \\ \alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p \\ \alpha_g \rho_g u_g E_g + \alpha_g u_g p \\ \alpha_l \rho_l u_l E_l + \alpha_l u_l p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p^i \\ p^i \\ -p^i u^i \\ p^i u^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F^D \\ F^D \\ F^D u^i \\ -F^D u^i \end{pmatrix}$$

여기서 α 는 기공률, ρ 는 밀도, u 는 속도, E 는 총에너지, p 는 압력, F^D 는 계면마찰을 나타낸다. 하첨자 g 는 기체상을, l 은 액체상을 의미한다.

계면압력 p^i 와 계면속도 u^i 는 다음과 같은 모델식을 사용한다.

$$p^i = p - \delta \frac{\alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g} (u_g - u_l)^2 \quad (2)$$

$$u^i = \frac{\alpha_g \rho_g u_g + \alpha_l \rho_l u_l}{\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l} \quad (3)$$

여기서 $\delta \geq 1$ 은 감쇠계수를 나타낸다.

본 모델에서는 액체와 기체를 모두 압축성으로 취급하며 다음과 같은 stiffened-gas 상태방정식을 사용한다.

$$p_k = (\gamma_k - 1) \rho_k e_k - \gamma_k p_{\infty, k} \quad (4)$$

기체와 액체상 사이의 계면마찰은 drift 플럭스법과 항력계수(drag coefficient)법이 주로 사용되는데 여기서는 후자를 사용하였으며 모델식은 다음과 같다[3].

$$F^D = -\frac{1}{8} C_D \rho_m A_{gl} |u_g - u_l| (u_g - u_l) \quad (5)$$

$$C_D = \frac{24(1 + 0.1 Re_p^{0.75})}{Re_p} \quad (6)$$

$$Re_p = \frac{|u_g - u_l| d_0 \rho_m}{\mu_m} \quad (7)$$

$$We = \frac{2d_0 \rho_m (u_g - u_l)^2}{\sigma} \quad (8)$$

$$A_{gl} = \frac{3.6 \min(\alpha_g, \alpha_l)}{d_0} \quad (9)$$

여기서 C_D 는 항력계수, ρ_m 은 혼합상의 밀도, A_{gl} 은 단위 부피당 경계면, Re_p 는 Reynolds 수, We 는 Weber 수, σ 는 표면장력, μ 는 점성계수를 나타낸다.

3. 수치 기법

지배방정식 (1)은 연산자 분리기법을 사용하여 다음과 같이 두 단계로 나누어 풀다.

$$L_H: \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{H} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$L_S: \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = L_S^{(\Delta t/2)} L_H^{(\Delta t)} L_S^{(\Delta t/2)} \mathbf{U}^n \quad (11)$$

첫 단계로서의 편미분 방정식은 HLL 기법을 사용하며 풀며, 두 번째 단계로서 소스항을 갖는 상미분방정식은 반음해법인(semi-implicit) 강성-ODE(stiff-ODE) 해법을 사용하여 수치적으로 계산한다.

편미분방정식 연산자 L_H 은 유한체적법을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{H}_i^n [(\alpha_g)_{i+1/2}^* - (\alpha_g)_{i-1/2}^*] \quad (12)$$

계산 셀 경계면에서의 플럭스는 다음과 같이 HLL 리만 해법으로부터 구해진다

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{S_{i+1/2}^R \mathbf{F}_i^n - S_{i+1/2}^L \mathbf{F}_{i+1}^n + S_{i+1/2}^R S_{i+1/2}^L (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n)}{S_{i+1/2}^R - S_{i+1/2}^L} \quad (13)$$

비보존항의 차분은 HLL 리만 해법과 유사한 방법으로 다음과 같이 계산된다.

$$(\alpha_g)_{i+1/2}^* = \frac{S_{i+1/2}^R (\alpha_g)_i^n - S_{i+1/2}^L (\alpha_g)_{i+1}^n}{S_{i+1/2}^R - S_{i+1/2}^L} \quad (14)$$

여기서 $S_{i+1/2}^{L,R}$ 은 셀 경계에서 가장 빠른 파동의 전파속도를 나타내며 다음과 같이 구한다

$$\begin{aligned} S_{i+1/2}^L &= \min\{0, (\lambda_k)_i, (\lambda_k)_{i+1}\} \\ S_{i+1/2}^R &= \max\{0, (\lambda_k)_i, (\lambda_k)_{i+1}\} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 고유치 λ 는 Yeom & Chang[2]의 근사 해석고유치를 사용하여 구할 수 있다

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u_g \\ \lambda_2 &= u_l \\ \lambda_3 &= u_g - a_g \\ \lambda_4 &= u_g + a_g \\ \lambda_5 &= u_l - a_l \sqrt{1 - \frac{\alpha_g \gamma_g \gamma_l^2 p_{\infty,l}}{\alpha_g \gamma_g \gamma_l (\gamma_l - 1) p_{\infty,l} + \alpha_l \rho_g a_g^2 \gamma_l + \alpha_g \rho_l a_l^2 \gamma_g}} \\ \lambda_6 &= u_l + a_l \sqrt{1 - \frac{\alpha_g \gamma_g \gamma_l^2 p_{\infty,l}}{\alpha_g \gamma_g \gamma_l (\gamma_l - 1) p_{\infty,l} + \alpha_l \rho_g a_g^2 \gamma_l + \alpha_g \rho_l a_l^2 \gamma_g}} \end{aligned} \quad (16)$$

또한 MUSCL-Hancock 방법[4]을 사용하여 본 스킴을 이차 정확도로 확장하였다

두 번째 단계인 소스항에 대한 상미분 방정식은 Bader and Deuflhard[5]가 제안한 반-음해법인 stiff-ODE 해법을 사용한다 이를 위해 소스항을 보존변수를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \partial U_1 / \partial t &= 0 \\ \partial U_2 / \partial t &= 0 \\ \partial U_3 / \partial t &= -0.125 \text{sign}(u_g - u_l) C_D A_{gl} \\ &\quad \times (U_1 + U_2) (U_3 / U_1 - U_4 / U_2)^2 \\ \partial U_4 / \partial t &= 0.125 \text{sign}(u_g - u_l) C_D A_{gl} \\ &\quad \times (U_1 + U_2) (U_3 / U_1 - U_4 / U_2)^2 \\ \partial U_5 / \partial t &= -0.125 \text{sign}(u_g - u_l) C_D A_{gl} \\ &\quad \times (U_3 + U_4) (U_3 / U_1 - U_4 / U_2)^2 \\ \partial U_6 / \partial t &= 0.125 \text{sign}(u_g - u_l) C_D A_{gl} \\ &\quad \times (U_1 + U_2) (U_3 / U_1 - U_4 / U_2)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $\text{sign}(a)$ 는 부호함수를 의미한다

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \geq 0 \\ -1 & \text{if } a < 0 \end{cases} \quad (18)$$

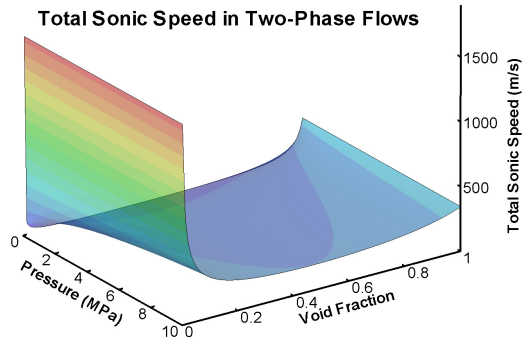


Fig. 1 Total Sonic Speed in Air-Water Two-Phase Flows as a Function of Pressure and Void Fraction.

본 상미분방정식 해법에서 사용되는 Jacobian 행렬(6 X 6)은 보존변수에 대해 식 (17)을 미분하여 쉽게 구할 수 있다. 상미분방정식의 계산은 오차가 $\epsilon = 10^{-15}$ 로 수렴할 때 까지 수행하였다.

3. 계산결과 및 논의

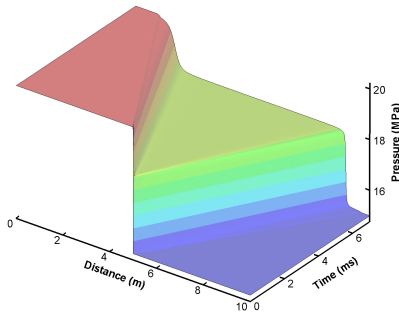
3.1 이상유동에서의 음속

이상유동에서의 음속은 이상유동 지배방정식의 고유치로부터 계산될 수 있으며 자세한 식은 참고문헌[2,6]에 나와 있다. 여기서는 Yeom & Chang[2] 근사 고유치를 이용하여 물공기의 이상유동에서 전체 기공률 영역과 넓은 범위의 압력에 대해서 음속을 계산하였다. 온도는 상온(300 K)으로 가정하였다.

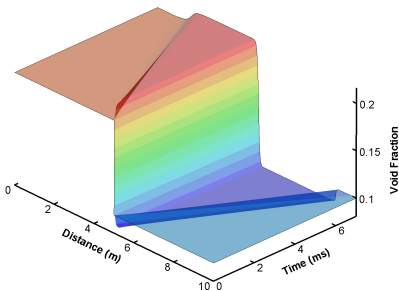
Fig. 1은 압력과 기공률에 따른 이상유동에서의 음속을 계산한 결과를 나타낸다. 음속은 기공률이 0.3 근처에서 최소값을 나타내며 0으로 가면서 그 값이 급격히 증가하며 0.3 근처에서 1로 가면서는 서서히 증가한다 또한 압력이 약 2 MPa 정도까지는 음속이 급격히 증가하다가 그 이후에는 서서히 증가하는 것을 알 수 있다

3.2 정지된 이상유동 충격파관에 의한 파동 전파

이상유동 충격파관 문제는 서로 다른 유동조건을 가진 이상유체(two-phase fluid)가 중앙의 격막으로 분리되어 있으며 순간적으로 이 격막을 파괴시킴에 따라 기공률파 충격파, 팽창파 등의 여러 가지 파동이 발생되어 전파되어 나가는 문제이다. 본 계산에서 공기는 $\gamma_g = 1.4$ 의 이상기체로 취급하고 물은 $\gamma_l = 2.8$, $p_{\infty,l} = 8.5 \times 10^8$ Pa의 stiffened-gas로 취급하였다. 충격파관 좌우의 초기조건은 다음과 같다



(a) 압력



(b) 기공률

Fig. 2 Wave Propagation in the Two-Phase Shock Tube.

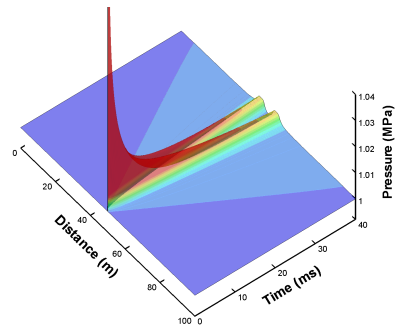
$$W_L = \begin{pmatrix} \alpha_g \\ p \\ u_g \\ u_l \\ \rho_g \\ \rho_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 20 \text{ MPa} \\ 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \\ 170.5 \text{ kg/m}^3 \\ 490.2 \text{ kg/m}^3 \end{pmatrix}, \quad W_R = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 15 \text{ MPa} \\ 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \\ 97.6 \text{ kg/m}^3 \\ 603.5 \text{ kg/m}^3 \end{pmatrix}$$

본 계산에서 1000개의 격자, CFL=0.4 값을 사용하였다 또한 계면압력 모델에서 감쇠계수 값은 $\delta=3$ 을 사용하였다

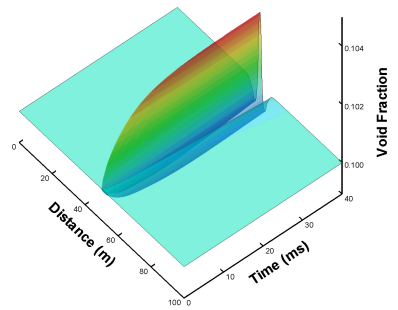
Fig. 2은 압력과 기공률의 시간에 따른 파동 전파 모습을 보여준다. 이 그림에서 오른쪽으로 전파되는 충격파와 왼쪽으로 전파되는 팽창파 그리고 중앙의 접촉불연속면 전파가 비정상적인 진동 및 overshoot 등이 없이 깨끗하게 잘 나타나며 본 수치모델이 안정적임을 알 수 있다.

3.3 이상유동에서 압력 펄스 및 기공률 펄스

여기서는 이상유동에서의 순간적인 펄스 파동의 전파에 대해서 조사한다 주변 압력이 1 MPa이고 기공률이 $\alpha_g = 0.1$ 인 정지된 혼합상에서 100 m 길이의 파이프 중앙에 1.5 MPa의 압력 펄스를 부과하여 이 펄스 파동의 전파를 수치적으로



(a) 압력



(b) 기공률

Fig. 3 Pressure Pulse Propagation in the Two-Phase Flows.

모사하였다. 본 계산에서 기체의 밀도는 1.2 kg/m^3 , 액체의 밀도는 1000 kg/m^3 으로 가정하였으며, 1000 개의 계산격자와 CFL=0.9 값을 사용하였다

Fig. 3(a)에서 중앙의 압력 펄스는 두개로 나뉘어 서로 다른 방향으로 전파되어 나가는 것을 보여준다 Fig. 3(b)에서는 압력 펄스로 인해 전파되어가 새롭게 생성되어 시간에 따라 그 크기가 증가하는 모습을 보여주고 있다

다음은 기공률 펄스 파동의 전파 문제를 고려한다. 앞의 문제와 같은 조건에서 압력은 1 MPa로 모두 동일하고 기공률만 0.9인 기공률 펄스를 중앙에 부과하였다 Fig. 4에서는 그 계산 결과를 보여준다 그림에서 나타났듯이 기공률 펄스 전파는 압력 펄스 전파에서처럼 두 개의 작은 펄스로 나뉘지 않고 하나의 펄스가 주변으로 확산되는 형태를 나타낸다

3.4 계면마찰항의 영향 및 다른 모델과 비교

마지막으로 계면마찰항의 영향 및 모델에 따른 수치해석 결과를 비교하였다 이를 위해 100 m/s의 속도로 서로 다른 방향으로 빠르게 이동하는 강한 팽창파 문제를 고려한다 다른 고유치 모델로 Nguyen 등[6]이 유도한 다음의 식을 사용하여 본 모델과 비교하였다

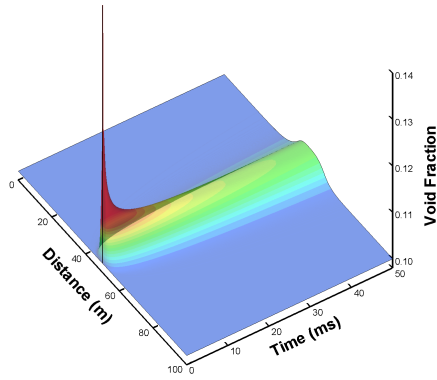


Fig. 4 Void Pulse Propagation in the Two-Phase Flows.

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= u_g + a_g \sqrt{\frac{\rho_l a_l^2}{\alpha_l \rho_g a_g^2 + \alpha_g \rho_l a_l^2}} \\
 \lambda_2 &= u_g - a_g \sqrt{\frac{\rho_l a_l^2}{\alpha_l \rho_g a_g^2 + \alpha_g \rho_l a_l^2}} \\
 \lambda_3 &= u_l + a_l \sqrt{\frac{\rho_g a_g^2}{\alpha_l \rho_g a_g^2 + \alpha_g \rho_l a_l^2}} \\
 \lambda_4 &= u_l - a_l \sqrt{\frac{\rho_g a_g^2}{\alpha_l \rho_g a_g^2 + \alpha_g \rho_l a_l^2}}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Fig. 5는 시간 0.5 ms 및 1.8 ms에서의 계산결과를 보여준다. 계면마찰항이 없을 때는 두 개의 작은 팽창파가 나타나며, 계면마찰항이 있으면 한 개의 큰 팽창파가 나타난다. 또한 계면마찰항은 파동의 전파속도를 느리게 만든다 이것은 계면마찰항이 두 상의 속도 차이가 너무 커지는 것을 막는 역할을 하기 때문이다. 또한 Nguyen의 모델과 현재의 모델을 비교했을 때 현재 모델이 수치확산이 적어 정확도가 높음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 계면마찰항을 고려한 압축성 이류체 모델을 사용하여 이상유동에서의 파동 전파의 특성을 수치적으로 모사하였다. 지배방정식은 두 개의 단계로 나누어 풀었으며 첫 번째 단계에서는 이류체 모델로 확장된 HLL 기법을 사용하여 계산하였고, 두 번째 단계에서는 반-음해법인 강성ODE 해법을 사용하여 소스항을 계산하였다. HLL 기법에서 사용되는 가장 빠른 파동의 전파속도는 근사 행렬인 Jacobian Matrix에서 구한 해석적인 고유치를 사용하여 계산하였다. 이상유동에서의 음속은 해석적인 고유치를 이용하여 기공률과 압력의 함수로 계산하였으며 충격파, 팽창파, 기공률파, 압력 펄스 기공률 펄스의 전파를 수치적으로 모사하였다. 마지막으로 소

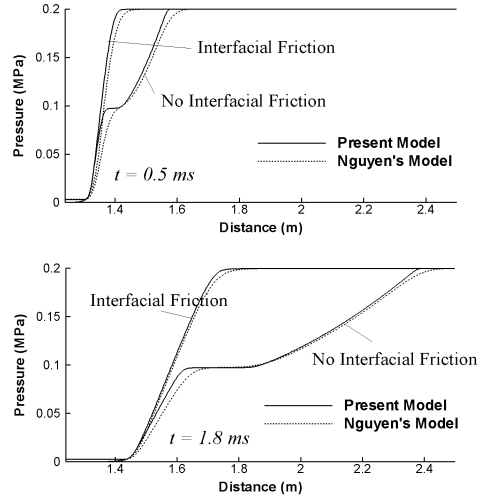


Fig. 5 Effect of the Interfacial Friction and Comparison of the present model with Nguyen's Model for Strong Rarefaction Wave Propagation Problem.

스항의 영향을 분석하였으며 계면마찰항은 이상유동에서 파동 전파 속도를 늦추는 역할을 함을 알 수 있었다

참고문헌

- [1] 1997, Legius, H.J.W., van den Akker, H.E.A. and Narumo, T., "Measurements on Wave Propagation and Bubble and Slug Velocities in Concurrent Upward Two-Phase Flow," *Experimental Thermal and Fluid Science.*, Vol.15, pp.267-278.
- [2] 2006, Yeom, G.S. and Chang, K.S., "Numerical Simulation of Two-Fluid Two-Phase Flows by HLL Scheme Using an Approximate Jacobian Matrix," *Numerical Heat Transfer B.*, Vol.49, pp.155-177.
- [3] 2001, Ransom, V.H. et al., *RELAP5/MOD3.3 Code Manual, Volume 1, NUREG/CR-5535/Rev 1-Vol 1*, Idaho National Engineering Laboratory.
- [4] 1999, Toro, E.F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- [5] 1999, Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P., *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, 2nd ed., Cambridge, New York.
- [6] 1981, Nguyen, D.L., Winter, E.R.F. and Greiner, M., "Sonic Velocity in Two-Phase Systems," *International Journal of Multiphase Flow*, Vol.7, pp.311-320.