



변분다중스케일법을 이용한 $Re_\tau = 180$ 채널 난류 유동의 대와류모사

장경식,^{*1} 이보현,² 윤범상,¹ 이주성,¹ 노명일¹

LARGE EDDY SIMULATION OF FULLY TURBULENT CHANNEL FLOW USING VARIATIONAL MULTISCALE METHOD

K. Chang,^{*1} B.H. Lee,² B.S. Yoon,¹ J.S. Lee¹ and M.I. Roh¹

In the present work, LES with new variational multiscale method is conducted on the fully developed channel flow with Reynolds number is 180 based on the friction velocity and the channel half width. Incompressible Navier-Stokes equations are integrated using finite element method with the basis function of NURBS. To solve space-time equations, Newton's method with two stage predictor multicorretor algorithm is employed. The code is parallelized using MPI. The computational domain is a rectangular box of size $2\pi \times 2 \times 4/3\pi$ in the streamwise, wall normal and spanwise direction. Mean velocity profiles and velocity fluctuations are compared with the data of DNS. The results agree well with those of DNS and other traditional LES.

Key Words : 변분다중스케일법(Variational Multiscale Method), 등기하해석(Isogeometric analysis), 채널유동(Channel flow)

1. 서론

변분다중스케일법(Variational Multiscale Method)을 기반으로 한 유동 해석 기술은 Hughes et al.[1]에 의해 처음으로 제안되었는데 이는 기존의 대와류모사(Large Eddy Simulation)의 비분해 스케일(unresolved scale)의 모델링 기법과는 다른 새로운 개념의 방법으로 간주되었다 이 방법의 기본 개념은 LES에 의한 분해 스케일(resolved scale)을 성긴 스케일(coarse scale)과 조밀한 스케일(fine scale)로 나누어 기존의 난류 에디 점성향(eddy viscosity)을 조밀한 스케일에 의해서만 구하는 것이다 이러한 VMS 기법을 등방성 난류 유동과 완전 발달된 채널 유동에 적용하여 계산한 결과[2], 기존의 모델링 방법의 결과와 잘 일치하거나 더 나은 결과를 보여주었다 최근 들어 Bazilevs et al.[3]은 추가적인 에디 점성향(eddy viscosity) 모델을 사용하지 않고 perturbation series와 fine-scale Green operator를 적용한 잔류 기반의 변분다중스케일기법 (Residual based Variational Multiscale Method) 을 제안하였고, 그 결과 역시 이전에 제안된 것과 잘 일치하거나 더 잘 예측하는 결과를 보였다

2. VMS 기법의 정식화

지배방정식으로 비압축성 Navier-Stokes 방정식이 적용되었다

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \text{ in } Q \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

여기서 $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^d$ 는 유체에 작용하는 힘이며 ν 는 동점도(kinematic viscosity)를 나타낸다.

주어진 식을 약형(Weak form)으로 나타내면 아래 변분식과 같이 나타낼 수 있다. V 를 지배방정식의 해와 가중함수(weighting function)의 공간으로 정한다

$$B(W, U) = B_1(W, U) + B_2(W, U) = L(W) \quad (3)$$

여기서

$$B_1(W, U) = (w(T^-), u(T^-))_\Omega - \left(\frac{\partial w}{\partial t}, u \right)_\Omega + (q, \nabla \cdot \mathbf{w}, p)_Q + (\nabla^s w, 2\nu \nabla^s U)_Q \quad (4)$$

1 정회원, 울산대학교 조선해양공학과

2 학생회원, 울산대학교 조선해양공학과

* Corresponding author, E-mail: kschang76@ulsan.ac.kr



$$B_2(W, U, V) = -(\nabla w U, u \otimes v)_Q \quad (5)$$

$$L(W) = (w, f)_Q + (w(0^+), u(0^-))_\Omega \quad (6)$$

$B_1(\cdot, \cdot, \cdot)$ 는 bilinear form이며 $B_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 는 trilinear form으로 정의된다.

약형(weak form)의 해 공간을 성긴 스케일 (coarse scale)과 조밀한 스케일 (fine scale)로 나누어 각 스케일의 지배방정식을 구할 수 있다. 이때 조밀한 스케일의 해를 구하는데 있어서 Bazilevs et al.[3]는 fine-scale Green operator 개념을 도입하여 Residual-based VMS 기법을 제안하였는데 이는 τ 와 국부 성긴 스케일의 잔류(residual)의 곱으로 나타내어진다.

$$\tilde{U} \approx -\tau Res(\tilde{U}) \quad (7)$$

식 (7)에 대한 계산은 Bazilevs et al.[3]의 보고서에 자세히 기술되어 있다. 결국 주어진 지배방정식에 대한 차분식은 다음과 같이 표현된다.

$$B^{MS}(W^h, U^h) - L^{MS}(W^h) = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} B^{MS}(W^h, U^h) &= B^G(W^h, U^h) \\ &+ (u^h \cdot \nabla w^h + \nabla q^h, \tau_M r_M(u^h, p^h))_\Omega \\ &+ (\nabla \cdot w^h, \tau_C r_C(u^h))_\Omega \\ &+ (u^h \cdot (\nabla w^h), \tau_M r_M(u^h, p^h))_\Omega \\ &- (\nabla w^h, \tau_M r_M(u^h, p^h) \otimes \tau_M r_M(u^h, p^h))_\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

$$L^{MS}(W^h) = (w^h, f)_\Omega \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B^G(W^h, U^h) &= \left(w^h, \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)_\Omega - (\nabla w^h, u^h \otimes u^h) \\ &- (\nabla \cdot w^h, p^h)_\Omega + (q^h, \nabla \cdot u^h)_\Omega \\ &+ (\nabla^s w^h, 2\nu \nabla^s u^h)_\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

각 항들에 대한 정의는 식 (12)와 같은데, τ_M 와 τ_C 는 조밀한 스케일의 속도와 압력에 해당되는 전단 응력이다

$$\begin{aligned} \tau_M &= \left(\frac{4}{t^2} + u^h \cdot Gu^h + C\mu^2 G : G \right)^{-1/2} \\ \tau_C &= (\tau_M g \cdot g)^{-1} \\ G_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} \\ g_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (12)$$

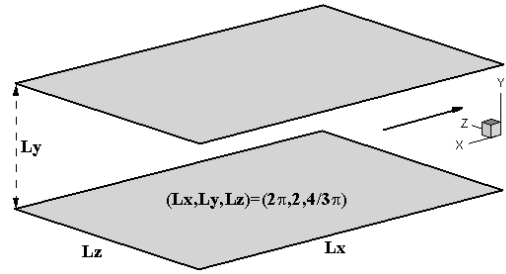


Fig. 1 Computational domain.

위식을 Jansen et al. [4]에 의해 제안된 generalized- α 방법을 이용하여 적분하였다. 식 (8)-(11)을 풀기 위하여 Saad and Schultz [5]의 two-stage predictor- multicorrector 기법을 적용한 Newton's method를 사용하였다. 자세한 알고리즘은 Bazilevs et al. [3]에 기술되어있다.

3. Simulation 개요

VMS 기법을 적용한 LES 코드 검증을 위하여 완전 발달된 채널 난류 유동을 해석하였다. 채널 반폭 (h)과 마찰 속도 (friction velocity)를 기준으로 $Re_\tau = 180$ 에 해당하는 완전 발달된 난류 유동 조건이며, 계산 영역의 크기는 유선방향 높이 방향, 폭방향으로 각각 $2\pi \times 2 \times 2/3\pi$ 으로 두었다. 격자 크기는 두 경우가 고려되었으며 각각 16^3 과 32^3 이다.

본 연구에서는 Hughes 교수 팀이 개발한 NURBS [6,7] 기저 함수를 이용한 등기하해석 기법을 적용한 코드[8]를 사용하였다. 차수에 따른 결과를 연구하기 위해 C^0 -연속적 선형 C^1 -연속적 2차, C^3 -연속적인 3차 노트벡터를 이용하여 이산화 하였다. 유선방향과 횡방향으로는 균일한 노트벡터(knot vector)를 적용하였지만 벽면 방향으로는 격자의 첫 번째 지점이 $y^+ \approx 1.3$ 안에 위치시키면서 벽 근처 방향으로 stretched 노트벡터를 사용하였다. 그림 2는 32^3 개의 요소에서 벽면 방향의 C^0 과 C^1 경우의 기저 함수를 보여주고 있다

난류 유동의 빠른 수렴 및 층류 유동으로의 수렴을 피하기 위하여, 1/7 지수법칙 (power law)을 만족하는 속도 프로파일에 일정 크기의 랜덤 섭동을 추가하여 초기 유동장 속도 조건으로 주었다. 횡방향 및 벽에 수직 방향으로도 랜덤 섭동을 주어 난류 유동으로 발달시켰다.

$Re_\tau=180$ 의 채널 유동을 해석하기 위하여 압력 구배에 의한 유도 힘 (driving force, fx)의 크기를 4.132658×10^{-3} 으로 두었으며 동점도 (kinematic viscosity)를 3.57143×10^{-4} 로 정하였다.

경계 조건으로는 유선방향과 횡방향으로 주기 조건 (periodic condition)을, 채널의 아래와 위의 벽면은 점착(no-slip)

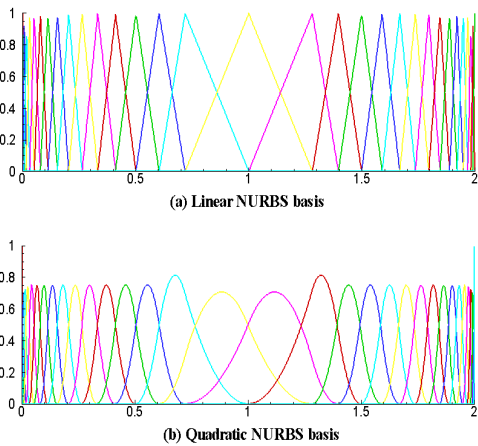


Fig. 2 NURBS basis function of the wall-normal direction.

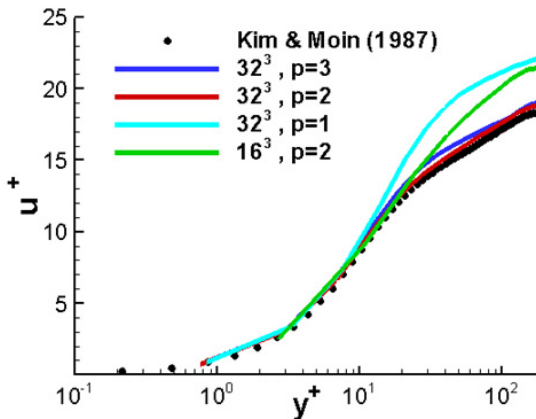


Fig. 3 Mean velocity profiles.

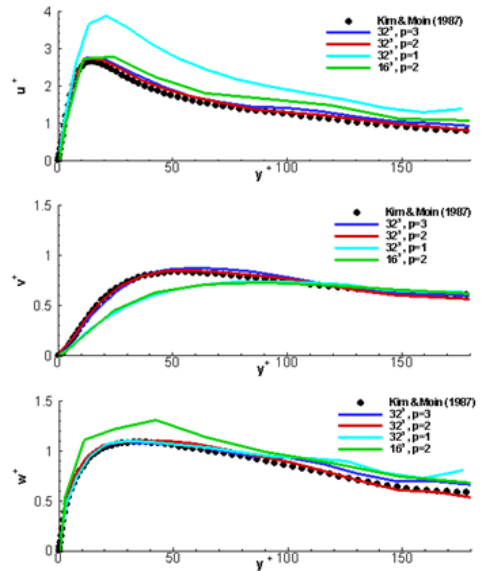
된 Dirichlet 경계조건을 주었다

4. 수치해석 결과

유선 방향의 속도와 속도 변동 (velocity fluctuation)을 시간과 공간에 대하여 평균하여 Kim and Moin [9]의 직접수치모사 (Direct Numerical Simulation) 결과와 비교하였다

그림 3을 통해 평균 속도 프로파일을 y^+ 와 u^+ 의 벽 단위로 나타내어 직접수치모사 결과와 비교하였다 계산 결과는 각각 C^1 연속성을 갖는 16^3 격자계, C^0 , C^1 , C^2 연속성을 가지는 32^3 격자계에 해당한다

2차 또는 3차 기저 함수를 갖는 32^3 격자계의 결과를 살펴보면 직접수치모사 결과와 잘 일치함을 알 수 있다 하지만

Fig. 4 Mean fluctuation profiles u' , v' , w' .

선형 기저 함수 (C^0 연속성)를 적용한 경우에는 속도와 섭동의 크기를 과도하게 예측하고 있다 C^0 에서 C^1 으로 연속성이 증가할수록 계산 결과는 더욱더 정확해지고 있지만 C^1 에서 C^2 로 변할 경우에는 계산 결과에 큰 차이를 보이지 못하고 있다. 또한 각각의 방향으로 격자를 2배로 증가시켰을 경우 ($16^3 \rightarrow 32^3$), 같은 차수의 기저함수 조건에서 훨씬 더 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 하지만 1차의 기저함수를 갖는 32^3 격자계의 결과보다 2차의 기저함수를 이용한 16^3 격자계의 결과가 더 정확했다 이 결과는 Bazilevs et al. [3]의 결과 경향과 잘 일치한다

5. 결론

완전 발달된 채널의 난류 유동($Re_\tau = 180$)에 VMS 기법을 적용한 LES 계산을 수행하였다. 이때 Bazilevs et al.[3]가 제안한 Residual을 기반으로 하는 VMS기법을 적용하여 이 모델의 적용 가능성을 살펴보았다. 그리고 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 풀기 위해 NURBS 기저함수를 기반으로 하는 등기하해석을 적용하였다

선형 NURBS 기저함수를 적용한 32^3 격자계에서 결과는 DNS 결과보다 다소 크게 예측되는 경향을 보였지만 2차와 3차의 기저함수를 적용했을 경우에는 DNS 결과와 잘 일치하였다. 하지만 수치 해석을 위해 요구되는 컴퓨터 계산 비용 및 사용 메모리를 고려한다면 3차의 기저함수를 적용하는 경



우 2차의 경우보다 큰 이점은 없음을 알 수 있었다

향후에는 32^3 격자계보다 더 큰 격자계에 적용하여 C^0 , C^1 , C^2 NURBS 기저함수를 격자에 따른 영향을 알아보고자 한다. 또한 결과의 정확도를 높이기 위해 적용되는 refinement (p-, h-, k-refinement)에 의한 결과의 예측 능력에 대한 연구를 수행할 예정이다. 이 기법의 실제 공학 문제에서의 적용 가능성을 살펴보기 위해서 좀 더 복잡하고 큰 레이놀즈 수에 해당하는 유동에 적용하여 그 결과를 살펴보고자 한다

후 기

본 연구는 한국과학재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학육성사업 (WCU) 으로부터 지원받아 수행되었습니다. (R33-2008-000-10150-0)

참고문헌

- [1] 2000 Hughes, T.J.R., Mazzei, L. and Jansen, K.E., "Large-eddy simulation and variational multiscale method," *Comp. Vis. Sci.*, Vol.3, pp.47-59.
- [2] 2001 Hughes, T.J.T., Mazzei, L., Oberai, A.A. and Wray, A.A., "The multiscale formulation of large eddy simulation : decay of homogeneous isotropic turbulence," *Phys. Fluids*, Vol.13, pp.505-512.
- [3] 2007 Bazilevs, Y., Calo, V.M., Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Reali, A. and Scovazzi, G., "Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flow," *Comput. Methods Appl. Engrg.*, Vol.197, pp.173-201.
- [4] 1999 Jansen, K.E., Collis, S.S., Whiting, C.H. and Shakib, F., "A better consistency for low-order stabilized finite element methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, pp.305-319.
- [5] 1896 Saad, Y. and Schultz, M.H., "GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear system," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.7, pp.856-869.
- [6] 1997 Pigel, L. and Tiller, W., *The NURBS book (Monographs in Visual Communication)*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- [7] 2001 Rogers, D.F., *An Introduction to NURBS with Historical Perspective*, Academic Press, San Diego, CA.
- [8] 2005 Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis : CAD, finite element, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.194, pp.4135-4195.
- [9] 1987 Kim, J., Moin, P. and Rogerm, R., "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.177, pp.133.