



Hermite 3차, 4차 및 5차 유동함수에 의한 비압축성 유동계산

김진환^{*1}

INCOMPRESSIBLE FLOW COMPUTATIONS BY HERMITE CUBIC, QUARTIC AND QUINTIC STREAM FUNCTIONS

J.W. Kim^{*1}

This paper evaluates performances of a recently developed divergence-free finite element method based on Hermite interpolated stream functions. Velocity bases are derived from Hermite interpolated stream functions to form divergence-free basis functions. These velocity basis functions constitute a solenoidal function space, and the simple gradient of the Hermite functions constitute an irrotational function space. The incompressible Navier-Stokes equation is orthogonally decomposed into a solenoidal and an irrotational parts, and the decoupled Navier-Stokes equations are projected onto their corresponding spaces to form proper variational formulations. To access accuracy and convergence of the present algorithm, three test problems are selected. They are lid-driven cavity flow, flow over a backward-facing step and buoyancy-driven flow within a square enclosure. Hermite interpolation functions from cubic to quintic are chosen to run the test problems. Numerical results are shown. In all cases it has shown that the present method has performed well in accuracies and convergences. Moreover, the present method does not require an upwinding or a stabilized term.

Key Words : 무발산(Divergence-free), 비압축성 유동(Incompressible flow), 회전 성분(Solenoidal component), 비회전 성분(Irrotational component), 기저 함수(Basis function)

1. 서론

Navier-Stokes 방정식에서 밀도의 변화를 무시할 수 있다면 운동 방정식이 상당히 단순화된다. 이러한 가정에 의하여 단순화된 유동 방정식을 우리는 비압축성 Navier-Stokes 방정식이라 하며 무차원 형식으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + (1/Re) \nabla^2 \underline{u} - \nabla p + \underline{f} \quad (1)$$

여기서, \underline{u} 는 유체 속도 벡터, p 는 밀도로 나눈 감소압력, Re 는 레이놀즈 수, \underline{f} 는 체적력을 의미한다. 또 식 (1)의 속도 벡터는 아래의 연속 방정식을 만족시켜야 한다.

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (2)$$

그러나 식 (2)는 식 (1)의 운동 방정식의 풀이에 상당한 제약 조건임은 잘 알려져 있다. 식 (2)는 속도 벡터는 회전(solenoidal)이어야 한다는 구속 조건을 제시하고 있으며, 이 구속 조건은 오히려 단순화된 운동 방정식의 풀이를 더 어렵게 하고 있다. 따라서 식 (2)를 만족시키는 속도 함수 공간을 찾는 시도는 오래 전부터 있었으나 이는 결코 쉽지 않다.[1]

모든 벡터는 회전(solenoidal) 성분과 비회전(irrotational) 성분으로 직교 분리될 수 있음을 이용하여[1], 이를 비압축성 Navier-Stokes 방정식(식 (1))에 적용하면 다음과 같이 분리된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = \pi^S(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + (1/Re) \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^S \quad (3)$$

$$\nabla p = \pi^I(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + (1/Re) \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^I \quad (4)$$

¹ 정회원, 동의대학교 기계공학과

* E-mail: kimjw@deu.ac.kr



여기서, f^S 는 중력항 f 의 비보존적 혹은 회전 성분을, f^I 는 f 의 보존적 혹은 비회전 성분을 의미하며, π^S 와 π^I 는 각각 벡터장의 회전 성분과 비회전 성분을 투사하는 투사 연산자(projection operator)이다.

회전함수 중에서 가중 함수 v 를 취하고, 비회전 함수 중에서 가중 함수 w 를 취하여, 식 (3)과 (4)에 각각 내적을 하면 다음과 같은 변분식을 얻는다.

$$(v, \frac{\partial}{\partial t} u) = -(v, \underline{u} \cdot \nabla u) - (1/Re)(\nabla v, \nabla u) + (v, f^S) \quad (5)$$

$$(w, \nabla p) = -(w, \underline{u} \cdot \nabla u) - (1/Re)(\nabla w, \nabla u) + (w, f^I) \quad (6)$$

여기서, 식 (5)와 (6)을 각각의 요소에 적용하면, 우리는 갈러킨(Galerkin) 유한 요소법을 수행하게 된다.

본 연구는 Hermite 겹 3차, 4차 및 5차 함수로부터 유도된 회전 및 비회전 기저 함수들을 이용하여 세 가지 benchmark 문제에 적용하여 정확성과 수렴성을 살펴보기로 한다. 첫 번째 문제는 Ghia 등[2]에서 제안된 덮개 움직임에 따른 공동 유동(lid-driven cavity flow)이고, 두 번째 문제는 잘 알려진 채널(CHANNEL) 유동으로 Gartling[3]에 의하여 풀이된 후향 계단 위의 유동(flow over backward-facing step)이며, 세 번째 문제는 속도장과 온도장의 연성 문제로 De Vahl Davis[4]가 제안한 정사각형 공동 내의 부력에 의한 유동(buoyancy-driven flow within a square cavity)이다.

Holdeman[5]의 초기 무발산 요소는 Hermite 단순 3차 함수를 이용하였으나, 요소 간의 경계에서 속도의 접선 성분이 연속이지 못하였다. 속도 성분들이 연속성을 유지하기 위하여 적어도 겹 3차 Hermite 함수가 요구된다. Hermite 4차 함수는 Gopalacharyulu[6]의 판 굽힘(plate bending) 연구에서 찾을 수 있고, Hermite 5차 함수는 Watkins[7]의 판 요소 연구에서 찾을 수 있다. 회전 보간 함수는 Hermite 함수로부터 유도되며, 편 상 Hermite 겹 3차 함수로부터 유도된 회전 보간 함수를 S3416 이라 부르고, Hermite 4차 함수에 의한 회전 보간 함수는 S4424, 그리고 Hermite 5차 함수에 의한 보간 함수는 S5424라 부르기로 한다. S3416은 Solenoidal Cubic degree on 4 node element with 16 degrees-of-freedom을 의미하고 S4424 및 S5424의 의미도 유사하다.

2. 사변형 요소에 대한 보간 함수

2.1 비회전 보간 함수

Hermite 쌍 3차 함수를 이용하여 무발산 보간 함수의 유도

과정을 보기로 한다. Hermite 쌍 3차 함수의 자유도는 미지수 그 자신과 x 및 y 방향에 대한 도함수들 및 교차 도함수로 구성된다. Hermite 쌍 3차 함수는 단순 3차 함수에 비하여 교차 도함수의 자유도가 첨가되었으며, 이는 일차 도함수의 자유도들이 요소 경계를 따라서 연속성을 유지하게 한다[8]. $\phi^e(x, y)$ 를 사변형 요소 내에서 스칼라 포텐셜 함수 $\phi(x, y)$ 의 근사 값이라 하고, 임의의 절점 i 에 대한 Hermite 쌍 3차 함수를 q_i 라 하면,

$$\begin{aligned} \phi^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 q_i^t \underline{\Phi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi})_i \underline{\Phi}_i^e \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 임의의 절점 i 에 대한 자유도 $\underline{\Phi}_i^e$ 는 다음과 같다.

$$\underline{\Phi}_i^e = (\Phi_i, \Phi_{i,x}, \Phi_{i,y}, \Phi_{i,xy})^t \quad (8)$$

비회전 벡터 함수들은 스칼라 포텐셜($\phi(x, y)$)의 기울기(gradient)로부터 얻을 수 있다. 비회전 기저 함수, $\mathbf{G}_i(x, y)$,는 스칼라 포텐셜, $\phi^e(x, y)$,의 구배를 취하여 구하면 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} \nabla \phi^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \nabla (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \underline{\Phi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \end{array} \right) \underline{\Phi}_i^e \end{aligned} \quad (9)$$

요소 내에서 $\nabla \phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{G}_i^t(x, y) \underline{\Phi}_i^e$ 로 근사되기 때문에 비회전 기저 함수, $\mathbf{G}_i(x, y)$,는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{G}_i^t(x, y) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \end{array} \right) \quad (10)$$

2.2 회전(solenoidal) 보간 함수

$\psi^e(x, y)$ 를 요소 내에서 유동 함수라면 $\psi^e(x, y)$ 는 벡터 포텐셜(유동함수)의 기저 함수 \underline{s}_i 및 요소 절점 i 의 자유도 $\underline{\Psi}_i^e$ 에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.



$$\psi^e(x,y) = \sum_{i=1}^n \underline{s}_i^t(x,y) \underline{\Psi}_i^e \quad (11)$$

여기서

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i, U_i, V_i, \Psi_{i,xy})^t \quad (12)$$

이며, 이를 Hermite 쌍 3차 함수에 대한 자유도와 비교하면 아래와 같다.

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i, \partial\Psi_i/\partial y, -\partial\Psi_i/\partial x, \partial^2\Psi_i/\partial x\partial y)^t \quad (13)$$

따라서 $\underline{s}_i(x,y)$ 는 $\underline{g}_i(x,y)$ 를 재배열하여 다음과 같이 두면 된다.

$$\underline{s}_i = (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi} \ g_{xyi})^t \quad (14)$$

속도 벡터 $\underline{u}^e(x,y)$ 는 유동함수 $\psi^e(x,y)$ 에 *curl* 을 적용함으로써 얻어진다. 따라서

$$\begin{aligned} \underline{u}^e(x,y) &= \nabla \times \psi^e(x,y) \hat{k} \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (\partial/\partial y) s_i^t \\ -(\partial/\partial x) s_i^t \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e \end{aligned} \quad (15)$$

회전 속도에 대한 보간 함수를 $\underline{S}_i(x,y)$, $i=1,\dots,4$ 는 다음과 같이 된다.

$$\underline{S}_i(x,y) = ((\partial/\partial y) \underline{s}_i \quad -(\partial/\partial x) \underline{s}_i) = (\underline{S}_{1i} \ \underline{S}_{2i}) \quad (16)$$

요소 내의 속도 $\underline{u}^e(x,y)$, $\partial \underline{u}^e/\partial x$ 그리고 $\partial \underline{u}^e/\partial y$ 는 아래와 같이 구한다.

$$\underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \underline{S}_i^t(x,y) \underline{\Psi}_i^e \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x} \underline{S}_i^t(x,y) \underline{\Psi}_i^e \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial y} \underline{S}_i^t(x,y) \underline{\Psi}_i^e \quad (19)$$

Hermite 4차 및 5차 함수에 대하여도 비슷하게 적용된다.

3. 무발산 요소의 정식화

임의 사변형 요소에서 식 (5)와 (6)에 대하여 Galerkin 잔여법을 적용하기로 한다. 식 (5)의 시간 항 $(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 \underline{M}^e , 대류항 $(\underline{v}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 \underline{C}^e , 소산항 $(1/Re)(\nabla \underline{v}, \nabla \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 \underline{D}^e , 그리고 외력의 회전(solcnoidal) 성분을 \underline{f}^e 라 하면 다음과 같이 된다.

$$\underline{M}^e = \int_{\Omega_e} \underline{S}_i \underline{S}_j^t d\Omega_e \quad (20)$$

$$\underline{C}^e = \int_{\Omega_e} \underline{S}_i \left(u \frac{\partial \underline{S}_j^t}{\partial x} + v \frac{\partial \underline{S}_j^t}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (21)$$

$$\underline{D}^e = \int_{\Omega_e} (1/Re) \left(\frac{\partial \underline{S}_i}{\partial x} \frac{\partial \underline{S}_j^t}{\partial x} + \frac{\partial \underline{S}_i}{\partial y} \frac{\partial \underline{S}_j^t}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (22)$$

$$\underline{f}^e = \int_{\Omega_e} \underline{S}_i \underline{f}^s d\Omega_e \quad (23)$$

여기서 위첨자 t 및 S 는 각각 전치 행렬과 회전 성분을 의미한다. S3416의 경우, 요소 행렬의 크기는 16 x 16이며, 회전 보간 함수 행렬, \underline{S} 의 크기는 16 x 2이다. 식 (6)은 압력식에 대한 변분식으로 이의 유한 요소 전개는 다음과 같이 한다. 압력항 $(\underline{w}, \nabla p)$ 에 대한 요소 행렬을 \underline{M}^e , 대류항 $(\underline{w}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 \underline{C}^e , 소산항 $(1/Re)(\nabla \underline{w}, \nabla \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 \underline{D}^e , 그리고 외력의 비회전 성분 $(\underline{w}, \underline{f}^l)$ 를 \underline{f}^e 라 하면 다음과 같이 된다.

$$\underline{M}^e = \int_{\Omega_e} \underline{G} \underline{G}^t d\Omega_e \quad (24)$$

$$\underline{C}^e = \int_{\Omega_e} \underline{G} \left(u \frac{\partial \underline{S}^t}{\partial x} + v \frac{\partial \underline{S}^t}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (25)$$

$$\underline{D}^e = \int_{\Omega_e} (1/Re) \left(\frac{\partial \underline{G}}{\partial x} \frac{\partial \underline{S}^t}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}}{\partial y} \frac{\partial \underline{S}^t}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (26)$$

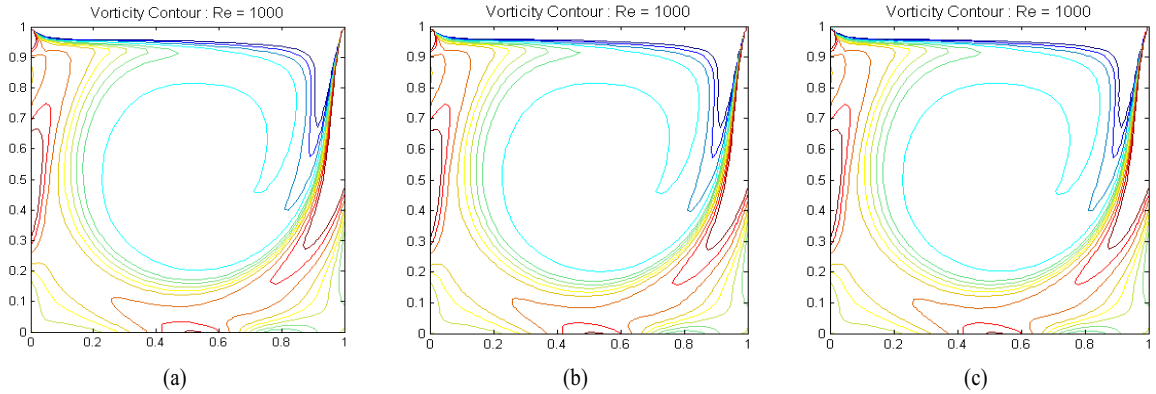


Fig. 1 Vorticity contours at Re = 1000: (a) S3416, (b) S4424, (c) S5424.

$$\bar{\mathbf{f}}_i^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_i^t \bar{\mathbf{f}}^i d\Omega_e \quad (27)$$

식 (20-27)을 이용하여 개별 요소에 대한 무발산 요소 정식화 과정을 수행하고, 이들을 조합하여 전체 행렬 방정식을 구성하게 된다.

4. 수치 계산

4.1 덮개 움직임에 의한 공동(lid driven cavity) 유동

유동 해석의 새로운 기법들은 대체로 Ghia 등[2]이 제안한 “덮개 움직임에 의한 공동 유동”에 대한 수치 결과들을 benchmark 해와 비교하여 종종 검증된다. 본 연구에서도 이 문제에 대하여 살펴보기로 하였다. 격자는 32 x 32 요소로 하고 경계에는 좀 더 세분화되도록 구성하였다. 먼저 레이놀즈 (Re) 수가 1000일 경우, 수평 중심선과 수직 중심선을 따라서 와도(vorticity)와 압력 값들에 대하여 최근 Botella 등[9]에 의하여 보고된 값들과 비교하여 보았다. Table 1에는 와도의 값들을, 그리고 Table 2에는 압력 값들을 나타내었다.

Table 1 Vorticity along horizontal and vertical centerline.

| y | $\omega(0.5, y)$ | | | | x | $\omega(x, 0.5)$ | | | |
|---------|------------------|---------|---------|----------|---------|------------------|---------|---------|----------|
| | S3416 | S4424 | S5424 | Ref. [9] | | S3416 | S4424 | S5424 | Ref. [9] |
| 1.0 | -16.346 | -14.747 | -14.667 | -14.753 | 0.07031 | 1.5153 | 1.5002 | 1.4989 | 1.5031 |
| 0.96875 | -8.8991 | -9.4880 | -9.4432 | -9.4950 | 0.09375 | 0.7780 | 0.8246 | 0.8262 | 0.8240 |
| 0.95313 | -5.1966 | -4.8554 | -4.8002 | -4.8575 | 0.22656 | -2.0054 | -2.0019 | -1.9941 | -2.0017 |
| 0.73438 | -2.0950 | -2.0913 | -2.0900 | -2.0912 | 0.5 | -2.0711 | -2.0676 | -2.0658 | -2.0672 |
| 0.5 | -2.0711 | -2.0676 | -2.0658 | -2.0672 | 0.85938 | -3.4317 | -3.4372 | -3.4239 | -3.4302 |
| 0.28125 | -2.2788 | -2.2676 | -2.2692 | -2.2677 | 0.94531 | 6.4949 | 6.5294 | 6.4433 | 6.5087 |
| 0.10156 | 1.6351 | 1.6356 | 1.6323 | 1.6344 | 0.96094 | 8.2637 | 8.2563 | 8.1700 | 8.2462 |
| 0.06250 | 2.2761 | 2.3156 | 2.3027 | 2.3179 | - | - | - | - | - |

Table 2 Pressure along horizontal and vertical centerline.

| y | $p(0.5, y)$ | | | | x | $p(x, 0.5)$ | | | |
|---------|-------------|----------|----------|----------|---------|-------------|----------|----------|----------|
| | S3416 | S4424 | S5424 | Ref. [9] | | S3416 | S4424 | S5424 | Ref. [9] |
| 1.0 | 0.055247 | 0.052998 | 0.052614 | 0.052987 | 0.0 | 0.090094 | 0.090484 | 0.090301 | 0.090477 |
| 0.96875 | 0.053145 | 0.051517 | 0.051414 | 0.051514 | 0.07031 | 0.097140 | 0.087659 | 0.087501 | 0.087653 |
| 0.95313 | 0.051943 | 0.050339 | 0.050252 | 0.050329 | 0.09375 | 0.083907 | 0.084401 | 0.084251 | 0.084386 |
| 0.73438 | 0.012675 | 0.012123 | 0.012070 | 0.012122 | 0.22656 | 0.046926 | 0.047273 | 0.047243 | 0.047260 |
| 0.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.28125 | 0.040451 | 0.040402 | 0.040363 | 0.040377 | 0.85938 | 0.049121 | 0.049025 | 0.048884 | 0.049029 |
| 0.10156 | 0.10441 | 0.104218 | 0.103930 | 0.104187 | 0.94531 | 0.077373 | 0.077213 | 0.076693 | 0.077154 |
| 0.06250 | 0.10943 | 0.109225 | 0.108902 | 0.109200 | 0.96094 | 0.079082 | 0.078729 | 0.078142 | 0.078685 |
| 0.0 | 0.11093 | 0.110617 | 0.110264 | 0.110591 | 1.0 | 0.077749 | 0.077485 | 0.076948 | 0.077455 |

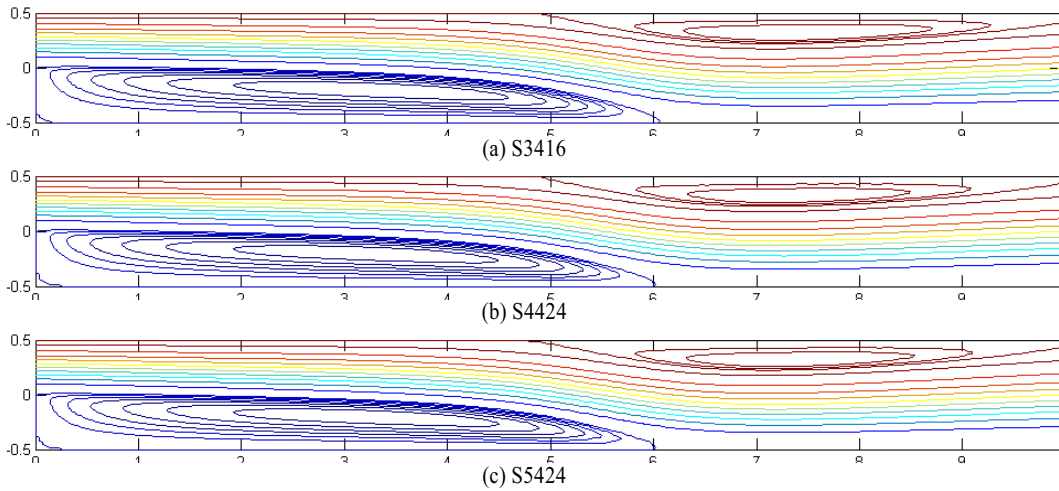


Fig. 3 Streamlines by 120 x 16 elements: (a)S3416, (b)S4424, (c)S5424.

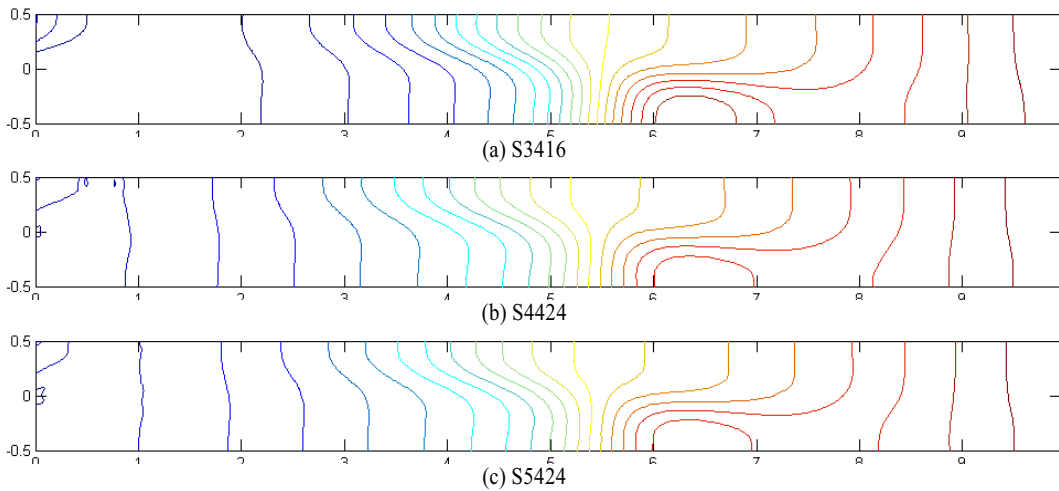


Fig. 4 Pressure contours by 120 x 16 elements: (a)S3416, (b)S4424, (c)S5424.

Table 4 Comparison of Hermite element results with those of Davis(1983) for natural convection flows in a square enclosure.

| | Ra = 104 | | | | Ra = 105 | | | | Ra = 106 | | | |
|-------------------------|-------------------|-------------------|-------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------|-----------------|-------------------|--------------------|-------------|-----------------|
| | $u_{\max}(y)$ | $v_{\max}(x)$ | $Nu _{x=0}$ | \overline{Nu} | $u_{\max}(y)$ | $v_{\max}(x)$ | $Nu _{x=0}$ | \overline{Nu} | u_{\max} | v_{\max} | $Nu _{x=0}$ | \overline{Nu} |
| S3416 | 16.184 (0.823) | 19.634 (0.119) | 2.244 | 2.245 | 34.743 (0.855) | 68.553 (0.064) | 4.515 | 4.521 | 64.779 (0.850) | 218.708 (0.038) | 8.789 | 8.816 |
| S4424 | 16.183 (0.823) | 19.628 (0.119) | 2.244 | 2.245 | 34.741 (0.855) | 68.635 (0.066) | 4.516 | 4.522 | 64.844 (0.850) | 220.553 (0.038) | 8.801 | 8.825 |
| Davis (1983) | 16.178 (0.823) | 19.617 (0.119) | 2.238 | 2.243 | 34.73 (0.855) | 68.59 (0.066) | 4.509 | 4.519 | 64.63 (0.850) | 219.36 (0.0379) | 8.817 | 8.800 |

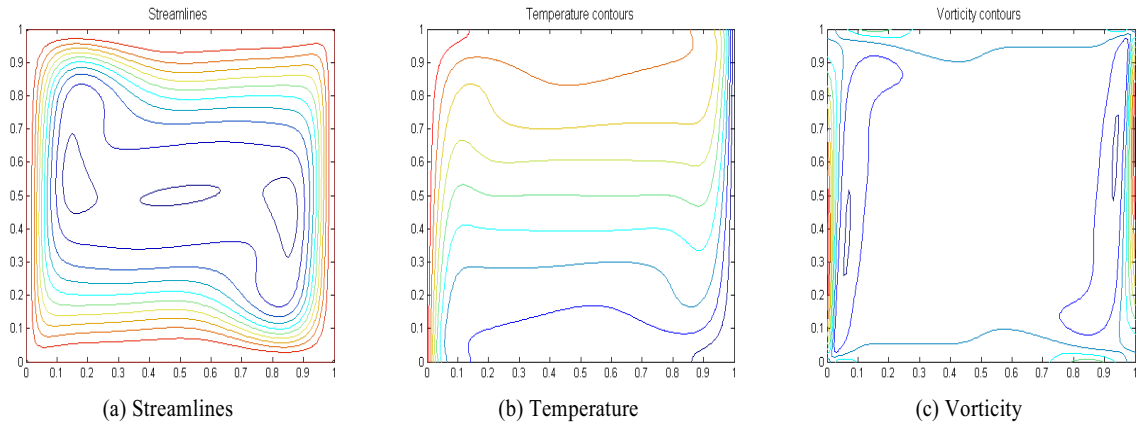


Fig. 5 Contour plots from S3416.

benchmark 해와 비교하고 있다. 현재의 해는 비교적 적은 수의 격자임에도 불구하고 benchmark 해에 잘 접근하고 있음을 알 수 있다.

4.3 정사각형 공동 내의 부력 유동(buoyancy-driven flow within a square cavity)

유동 함수법은 유동장과 온도장의 연성 문제에도 적용될 수 있다. 이 문제는 Ra 수가 증가함에 따라 안정성 및 수렴성의 문제를 야기한다. 이 논문에서는 Ra = 106에 대한 유선, 온도 및 와도에 대한 등고선 도를 보이기로 한다.

Fig. 5에 S3416의 수치 결과들을 각각 나타내었으며, S4424의 결과들도 S3416의 것과 거의 일치하고 있다. 이 경우에도 우리는 유동 함수법이 유동 및 온도 변수들을 적절히 예측하고 있음을 알 수 있다. Table 4에는 De Vahl Davis[4]의 해와 유동 함수법에 의한 해와의 비교를 나타내었다.

5. 결 론

최근 Holdeman[5]은 Hermite serendipity 함수에 의하여 보간된 유동 함수로부터 회전 기저 함수를 쉽게 추출할 수 있었으며, 이를 토대로 일반적 회전 기저 함수를 구성할 수 있음을 보였다. 이 연구에서는 고차 Hermite 유동함수에서도 원활히 수행할 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

[1] 1981, Griffiths, D.F., "An Approximately Divergence-Free

9-Node Velocity Element (With Variations) For Incompressible Flows," *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol.1, p.323-346.

[2] 1982, Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., "High-Resolution Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. of Comp. Physics*, Vol.48, p.387-411.

[3] 1990, Gartling, D.K., "A test problem for Outflow boundary conditions-Flow over a backward-facing step," *Int. J. for Numer. Methods in Fluids*, Vol.11, p.953-967.

[4] 1983, De vahl Davis, G., "Natural Convection of Air in a Square cavity: Bench Mark Numerical Solution," *Int. J. for Numer. Methods in Fluids*, Vol.3, p.249-264.

[5] 2002, Holdeman, J.T., "Recent Advances in the Finite Element Method for Incompressible Flow," *USNCTAMI4 Conference*, Blacksburg, VA.

[6] 1973, Gopalacharyulu, S., "A higher order conforming rectangular plate element," *Int. J. for Numer. Methods in Engr.*, Vol.6, p.305-308.

[7] 1976, Watkins, D.S., "On the construction of conforming rectangular plate element," *Int. J. for Numer. Methods in Engr.*, Vol.10, p.925-933.

[8] 2008, 김진환, "이차원 비압축성 유동계산을 위한 Hermite 겹3차 유동함수법," *한국전산유체공학회지*, 제13권, 제4호, p.13-23.

[9] 1998, Botella, O. and Peyret, R., "Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow," *Computers & Fluids*, Vol.27, p.421-433.