



와도장에 근거한 후류 가시화 기법

이 경 세,¹ 백 제 현^{*2}

A VORTICAL WAKE VISUALIZATION METHOD BASED ON THE VORTICITY FIELD

K.S. Lee¹ and J.H. Baek^{*2}

In this study, a vortex visualization method based on the vorticity magnitude is developed. One of the simplest models for a vortex is a vortex filament with the maximum vorticity on its center. The proposed method is based on the observation of this ideal distribution of vorticity magnitude. Laplacian and Hessian matrix of vorticity magnitude are tested for detecting the local maximum of vorticity magnitude. These ideas were applied to wake flow past a sphere. It was found that the Laplacian method is not able to distinguish vortices from the underlying shear layer clearly, while the Hessian matrix method does not suffer from this problem.

Key Words : 와류(Vortex), 가시화(Visualization), 와도(Vorticity), 라플라시안(Laplacian), 헤시안 매트릭스(Hessian matrix)

1. 서 론

유동가시화는 실험 또는 수치모사로부터 얻어진 이산화된 데이터를 인간이 직관적으로 이해할 수 있도록 그래픽 이미지로 전환하는 과정이며 매우 다양한 기법들이 존재한다 예를 들어, 정상상태 유동장의 가시화에는 유동장의 속도나 압력장과 같은 기초변수들의 벡터 혹은 스칼라 플롯 유선 등이 많이 사용된다

이러한 전통적인 방법들은 직관적이고 이용하기 매우 쉽기 때문에 그동안 일상적으로 사용되어 왔다 그러나 최근 비정상 유동장 및 매우 복잡한 유동장에 대한 수치모사가 일반화된 상황에서는 그 적용성에 한계가 있으며 이러한 유동장에 더 적합한 방법이 요구되었다 이에 속도나 압력과 같은 직접적인 변수를 가시화하는 대신 간접적으로 와류구조를 가시화하는 것이 보다 복잡한 유동장에 있어서 좋은 대안이 되고 있다.

이상적인 와류구조는 Helmholtz 이론[1]에 의하면 유동에 매몰되어 함께 이동하기 때문에 이를 통해 유동 흐름을 직관적으로 파악할 수 있다 즉 가시화 실험에서의 와류 구조를

모방할 수 있다 또한 Biot-Savart 법칙[1]에 의해 와류가 근처의 비점성 영역의 유동장의 근원이 되기 때문에 이를 유동장의 핵심구조라고 말할 수 있다 따라서 이러한 와류의 가시화는 앞서 언급한 속도나 압력을 통한 가시화에 비해 많은 장점을 가지고 있으며 이러한 와류 가시화 기법은 최근 복잡한 비정상 유동의 가시화에 많이 사용되고 있다[2-5].

그러나 현재까지도 본질적으로 엄밀한 와류의 수학적 정의가 존재하지 않기 때문에 지금까지 다양한 와류 가시화 방법들이 제안되고 사용되고 있다 이러한 방법들은, 매우 단순한 Lamb 와류[1]와 같은 이상화된 예를 제외한다면 일반적으로 복잡한 삼차원 유동장 상에서의 와류를 각각의 정의에 따라 다르게 표지하게 된다 결국 각 방법들이 포착한 와류들은 보통의 경우 서로 완전히 일치하지는 않는다 현실적으로 모든 상황에서 표준으로 받아들여지는 와류 가시화 방법은 없다고 볼 수 있다.

Jeong과 Hussain[3]은 몇가지 와류 가시화 방법들에 관해 고찰하면서 와도를 이용한 와류 가시화 방법의 단점을 지적하였다. 그럼에도 국소영역에 집중된 높은 와도는 와류의 존재를 나타내는 강력한 증거로 여겨진다 또한 와도는 Galilean 불변량이기 때문에 와류 표지자로서의 기초적인 요구조건을 만족하며[3] 유동장이 압축성이건 비압축성이건 잘 정의되는 특성이다 따라서 이러한 국소적인 와도 집중을 포착함으로써 와류를 가시화하는 것은 합리적인 와류 표지자 개발에 있어

1 포스텍 기계공학과 박사과정

2 포스텍 기계공학과 교수

* Corresponding author, E-mail: jhbaek@postech.ac.kr



하나의 출발점이 될 수 있을 것이다

본 연구에서는 이러한 와도장에 기반한 와류 가시화 기법을 제안하고 몇가지 유동에 적용하여 그 유용성을 검증하였다.

2. 라플라시안 방법

2.1 와도 라플라시안

가장 단순하고도 명확한 와류 모델은 와류 필라멘트이다. 와류 필라멘트는 그 중심에서 국소적으로 강제회전을 가지며 최대 와도를 갖게 된다. 와도는 그 중심에서부터 반경반향으로 점차 감소하게 되며 볼텍스 필라멘트 외부 영역은 점차 자유 와류가 된다. 이상적인 와류 모형에 가까운 와류는 흔히 익끝단에서 발생하는 강한 와류에서 발견된다. 이러한 와류의 정확한 공간상의 위치를 찾기 위해 Strawn과 Kenwright[5]는 후류에서 최대 와도를 갖는 점들을 추출하는 방법을 사용하였다. 이에 반해, 본 연구에서는 그들의 방법처럼 직접적으로 와류의 중심을 찾는 대신 와류의 경계면을 찾는 간접적인 방법을 사용한다.

본 연구에서의 와류를 식별하는 방법은 일반적으로 이상적인 와류들이 반경방향으로 큰 와도 변화를 가지는 것에 기초한다. 이러한 변화에 대한 지시자로서 단순한 와도에 대한 라플라시안을 생각해 볼 수 있다 즉 와도의 라플라시안이 0이 아니면 이는 부호에 따라 근처에 최대값 혹은 최소값이 존재함을 의미한다. 다시 말해, 라플라시안 값이 음이면 그 근방에서 최대값을 갖고 양이면 최소값을 가지게 된다 따라서 음의 와도 라플라시안 값으로 표현되는 반경방향으로의 와도 변화는 중심점에서 최대 와도를 갖는 이상적인 와류를 감지할 수 있다고 볼 수 있다.

한편, 앞서 언급한 와류 형태에 더해, 갑자기 축회전하는 파이프 내 유동과 같이 중심점에서 최소 와도를 갖는 와류를 생각해 볼 수 있다. 이 유동 또한 일반적인 와류와 같이 선회 유동을 가지지만 와도 최대값은 파이프 벽에서 생긴다. 이런 두가지 형태의 와류는 모두 선회유동이면서 중심에서 압력 강하가 발생한다. 그러나 와도 분포는 서로 매우 다르다. 앞서의 와류는 익끝단에서 생기는 이상적인 와류 필라멘트와 같은 것이지만 후자의 경우는 후류에서는 보기 힘든 구조이다. 따라서 전자만 통상적인 와류로서 인정한다면 와류 표지자 η 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\eta = \nabla^2 w < 0 \tag{1}$$

본 방법과 기존 와류 식별방법과의 차이에 대해 알아보기 위해 참고문헌[5]에서 인용한 다음과 같은 회전속도 V_θ 를 갖

는 이차원적인 단순 와류모형을 하나의 테스트 문제로 고려해 본다.

$$V_\theta = \frac{r\Gamma}{2\pi(r^2 + a^2)} \tag{2}$$

여기서 r 은 반경이며 a 는 회전 중심의 반지름이고 Γ 는 서클레이션이다. Fig. 1에서 보는바와 같이 이 모델은 전형적인 익끝단 와류와 같이 중심에서 최대 와도를 갖는 회전중심을 가진다. 이러한 단순 축대칭 와류 모델에 대해 현재 가장 일반적화된 방법이며 진보된 방법 중 하나인 λ_2 방법[3]에 의하면 이 와류의 반지름은 a 이다. 이는 전통적인 와류 경계에 대한 정의와 일치한다. 이에 반해 라플라시안 방법은 그보다 작은 $a/\sqrt{2}$ 를 경계로 한다. 이러한 불일치는 문헌상의 여타 방법들이 최대 회전속도면을 와류 경계로 포착하는 반면에 본 방법은 $\nabla^2 w = 0$ 인 면을 경계면으로 포착하기 때문이다. 결과적으로 와류의 경계를 보다 와류 중심에 가까운 면에서 포착하게 된다.

물리적인 의미는 다음과 같이 설명될 수 있다. 이차원 비압축성 와류의 와도는 다음과 같은 와도 전달 방정식으로 표현된다.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = \frac{1}{Re} \nabla^2 w \tag{3}$$

여기에서 Re 는 레이놀즈수이다. 와류가 축대칭이라면 다음과 같이 간소화할 수 있다.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 w \tag{4}$$

따라서 Fig. 1에서와 같이, 와류 경계에서 와도는 시간에 따라 변하지 않으며 와류 중심은 확산에 의해 와도를 잃고 이에 반해 외측은 와도가 점차 증가한다. 이와 같이 와류 내부에서 점성 확산에 의한 와도 감소가 심하다는 측면에서 이러한 와류에 대한 정의는 적절하다고 볼 수 있으며 와류 식별자로서의 라플라시안을 사용할 수 있을 것이다.

2.2 리스케일링

와도의 라플라시안을 이용한 와류 식별 방법은 와류 경계면 뿐 아니라 포텐셜 유동에서도 0이기 때문에 실제로 와류를 추출하기 위해서는 0보다 작은 음수를 사용해야 하며 최적값은 시행착오를 통해 구하게 된다.

그러나 표현 가능한 와류의 크기가 국소적인 격자 크기

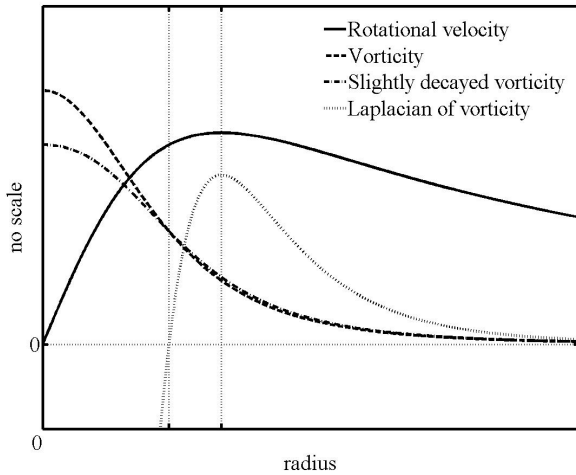


Fig. 1 A simple vortex model.

L_c 에 비례하고 이 정도 크기의 와도의 라플라시안 값이 이의 역수에 비례하기 때문에 작고 강한 와류와 크고 약한 두가지 극단적인 와류를 표시하기 위한 적절한 값이 각 경우에 따라 매우 다르게 된다. 결국 다양한 스케일의 와류를 하나의 파라미터로 추출하는 것이 무척 어려워진다

작고 강한 와류는 보통 근거리의 후류에서 발견되며 크고 약한 와류는 먼 하류에서 발견된다. 좋은 와류 표시자가 되기 위해서는 이러한 두 극단적인 와류가 함께 잘 포착되어야 할 필요가 있다. 이러한 국소 길이 스케일에 대한 민감도를 줄이기 위하여 다음과 같이 국소 길이 스케일 L_c 의 삼승에 대한 근사치로서 국소 셀 부피 V_c 를 곱하는 리스케일링을 한다

$$\eta_s = V_c \nabla^2 w \sim L_c^3 \nabla^2 w \quad (5)$$

결과적으로 이러한 리스케일링은 길이에 대해 무차원화 효과를 갖는다. 이와 함께 매우 작은 국소 길이 스케일을 갖는 영역에서의 매우 작은 와도에 대한 노이즈가 크게 증폭되는 것을 막는 역할도 하게 된다.

물리적으로 이 리스케일링은 서로 다른 격자 크기를 갖는 영역에서의 와류 사이에 다음과 같은 연관을 갖도록 한다. 서로 다른 영역에서의 격자 크기와 이로서 표현 가능한 가장 작은 와류의 와도 변화의 크기를 각기 L_1 , Δw_1 과 L_2 , Δw_2 라고 하면 단일 파라미터 η 에 대하여 두 와류는 식 (5)에 의해 다음과 같이 연관된다

$$L_1^3 \left(\frac{\Delta w_1}{L_1^2} \right) = L_2^3 \left(\frac{\Delta w_2}{L_2^2} \right) \quad (6)$$

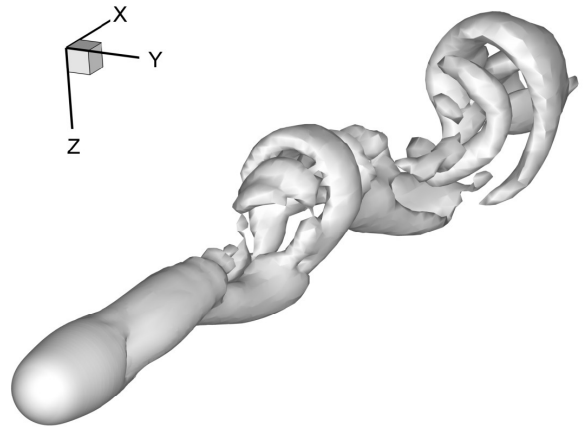


Fig. 2 Vortical wake past a sphere, Re=500.

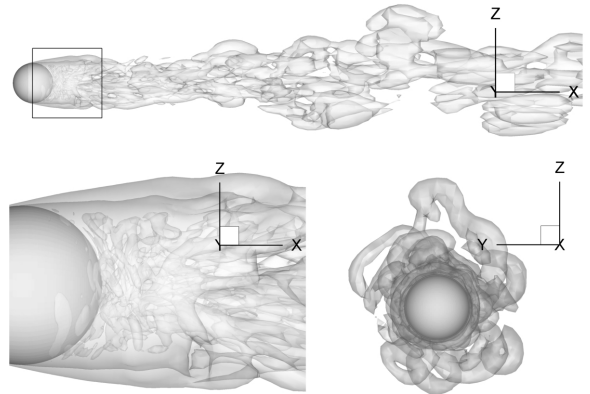


Fig. 3 Turbulent vortical wake Re=10000.

따라서 $L_1 \nabla w_1 = L_2 \nabla w_2$ 이 성립하고 이는 가장 가는 와류 필라멘트에 대해 회전 속도 V_θ 와 국소 길이 스케일 L_c 를 사용하여 V_θ/L_c 로 근사할 수 있다. 그러므로 단일 파라미터에 의해 식별되는 와류들은 같은 회전 속도를 갖는 와류라고 볼 수 있으며 이는 표시자가 격자 크기에 둔감하도록 하는 원인이 된다.

2.3 구 주위 유동에 적용

라플라시안 방법을 구 주위의 후류에 적용하였다. 각기 층류와 난류에 속하는 레이놀즈 수 500과 10000의 두가지 유동을 가시화 하였다. 사용된 격자는 58만개의 육면체 셀로 이루어진 비정렬 격자이다. 두 경우 모두 와류 표시자 값은 0.01이다.

레이놀즈 수 500의 유동에서는 축회전 방향의 불안정성으로 인한 나선형의 와류가 잘 포착되었다. 레이놀즈 수 10000



는 거대와모사에 의해 계산되었다 측면 및 정면 그림 및 구 근처에서의 그림들에서 큰 파형의 후류와 함께 구 뒷면에서 매우 복잡하게 얽혀있는 작은 와류 필라멘트들이 잘 포착되고 있음을 확인 할 수 있다

그러나 저 레이놀즈 수 영역이라고 할 수 있는 레이놀즈수 500의 유동장에서 와류가 주유동방향으로 늘려진 듯한 모양을 볼 수 있는데 이는 배경 유동장에 속한 와도 변화와 와류 자체의 와도 변화를 라플라시안 표지자가 구분하지 못하는 것 때문에 생기는 것이다 이는 상대적으로 고 레이놀즈 수가 되면 와류내 와도 강도가 강화되어 완화되는 문제이지만 완전히 사라지지 않으며 이 방법의 근본적인 한계점이 된다

3. 헤시안 매트릭스를 이용한 방법

앞절에서의 와도의 라플라시안을 이용한 와류 표지자는 구 주위 유동에서의 예에서 알 수 있듯이 와류의 와도뿐 아니라 와류가 아닌 배경 와도 변화에도 반응한다 즉 평판위에서의 비박리 층류 경계층과 같이 와류가 존재하지 않는 유동에서도 벽에서 수직인 방향으로의 와도 구배로 인해와류가 존재한다고 오동작하게 된다 만일 두 방향의 구배가 독립적으로 존재하고 각 방향의 구배가 모두 최대값의 존재를 암시할 때 만 와류로 인정하게 한다면 이러한 오동작을 막을 수 있을 것이다. 이러한 목적을 위해 다음과 같은 와도의 헤시안 매트릭스를 생각할 수 있다

$$H_w = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial z} \end{pmatrix} \quad (7)$$

이 헤시안 매트릭스의 고유치 2개가 음이면 위와 같은 조건을 만족할 수 있다 따라서 헤시안 매트릭스의 고유치를 크기순으로 나열하여 두 번째 고유치가 음이면 와류로 인정하는 와류 표지자로 삼을 수 있다

그러나 여기에서 한가지 주의 깊게 고려해야 될 점이 있다. 두 개의 고유치가 각기 와류의 반경 방향으로의 최대값 여부와 관여하는가이다 두 개의 고유치 중 한 개의 고유치는 와도 벡터 방향으로의 구배와 관련된 고유치일 수 있기 때문이다. 이런 경우 두 개의 고유치가 음수라고 하더라도 와류를 포착하고자 하는 목적과는 부합되지 않는 경우가 존재하게 된다. 그러므로 와류의 반경 방향으로의 구배와 관련된 고유치가 음이 되는 것만을 선택하여야 한다

이를 위해 Fig. 4와 같이 와도 벡터와 이에 수직한 평면으

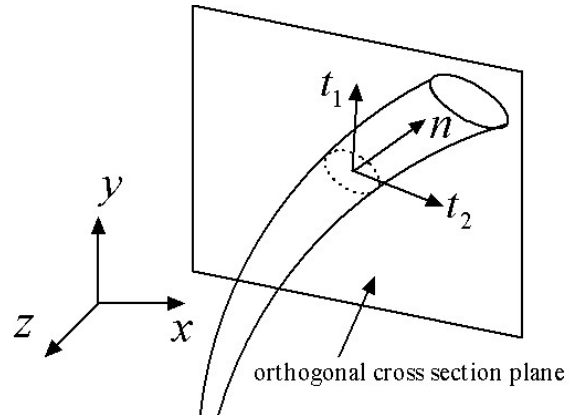


Fig. 4 local coordinate system at a vortex center.

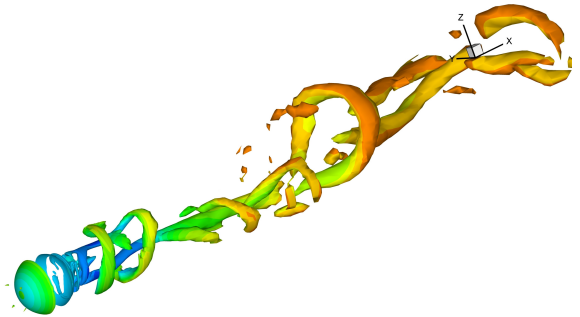


Fig. 5 vortical structure by hessian matrix method.

로 이루어진 국소좌표계로의 변환을 이용하여 와도 벡터 방향으로의 구배 성분을 명시적으로 추출할 수 있다 즉 다음과 같이 표준 좌표계로부터 국소좌표계로 선형변환된 헤시안 매트릭스를 구할 수 있다

$$H_w' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial n} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t_2 \partial t_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial t_2 \partial t_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial t_2 \partial n} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial n} \end{pmatrix} \quad (8)$$

변환된 좌표계에서 와도 벡터축 방향을 무시하고 와도 벡터에 수직한 두 방향으로의 이차원 헤시안만을 고려하면 앞서의 목적에 부합하는 고유치 상태를 판별할 수 있게 된다

이 방법을 레이놀즈 수 650에서의 구 주위 유동에 적용한 것을 Fig. 5에 나타내었다. 상대적인 비교를 위하여 Q 기준법

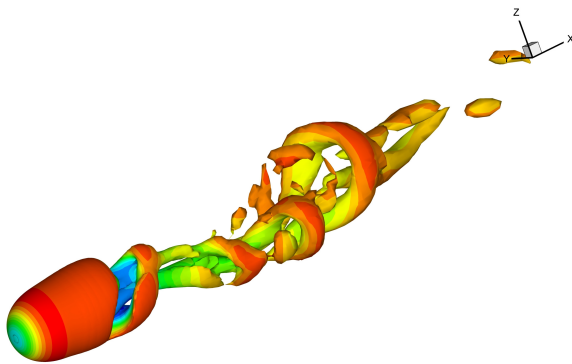


Fig. 6 vortical structure by Q criterion.

[8]을 사용한 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 두 경우 모두 후류의 와류 구조를 잘 보여주고 있으나 상대적으로 헤시안법이 보다 정교한 결과를 보여주고 있다 특이할만한 차이점으로 헤시안법은 구 근처의 원통형 전단층이 와류구조로 인식되지 않는다는 점과 후류 영역이 상대적으로 명확하다는 점을 들 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 와류를 가시화하기 위하여 가장 단순하고 명확한 와류 형태인 와류 필라멘트를 출발점으로 하여 와도장에 기반한 와류 가시화 방법을 제안하였다. 와류 필라멘트의 경계에서의 와도 변형을 감지하기 위하여 와도의 라플라시안 방법을 와류 표지자로 먼저 고안하였으나 구 주위 유동에 적용한 결과 배경 유동장의 전단유동장으로 인한 영향으로 와류를 선명하게 포착하지 못하는 한계를 보였기에 국

소 좌표변환을 통해 와도 벡터에 수직인 방향으로의 고유치만으로 와류를 식별하는 헤시안 매트릭스 방법을 개발하였고 성공적으로 와류를 명확히 구분하였으며 기존 방법인 Q 방법에 비해 상대적으로 정밀한 와류 구조를 보여주었다

참고문헌

- [1] 1993, Ogawa, A., *Vortex Flow*, CRC Press.
- [2] 1990, Chong, M.S., Perry, A.E. and Cantwell, B.J., "A general classification of three dimensional flow fields," *Physics of Fluids A*, Vol.2, No.11, pp.765-777.
- [3] 1995, Jeong, J. and Hussain, F., "On the identification of a vortex," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.285, pp.69-94.
- [4] 2005, Chakraborty, P., Balachandar, S. and Adrian, R.J., "On the relationships between local vortex identification schemes," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.535, pp.189-214.
- [5] 1999, Strawn, R.C., Kenwright, D.N. and Ahmad, J., "Computer visualization of vortex wake systems," *AIAA Journal*, Vol.37, No.4, pp.511-512.
- [6] 2000, Tomboulides, A.G. and Orszag, S.A., "Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.416, pp.45-73.
- [7] 2006, Yun, G., Kim, D. and Choi, H., "Vortical structures behind a sphere at subcritical Reynolds numbers," *Physics of Fluids*, Vol.18, 015102.
- [8] 1988, Hunt, J.C.R., Wray, A.A. and Moin, P., "Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows," *In Center for Turbulence Research Report*, pp.193-208.