

SMAC법에 의한 2차원 자유분류의 수치해석

정 세 훈,¹ 안 영 준,¹ 신 병 록^{*2}

NUMERICAL ANALYSIS FOR 2-D FREE JET FLOW BY SMAC SCHEME

S.H Jung,¹ Y.J An¹ and B.R. Shin^{*2}

Numerical analysis of two dimensional incompressible laminar free jet flow was carried out by using finite difference SMAC scheme. Flow characteristics of free jet flow such as jet width, similarity of jet velocity and hypothetical origin were investigated for different Reynolds numbers of $Re=30$ and 100 . The reliability of predictions were confirmed by comparison with exact solution. Non-dimensional velocity distribution showed similarity of jet flow velocity after initial region. In the region of laminar flow, the location of hypothetical origin becomes more distant with Reynolds number.

Key Words : 수치 해석(Numerical Analysis), 자유 분류(Jet Flow), 가상 원점(Hypothetical Origin), SMAC법(SMAC Scheme), 속도 상사성(Similarity of Velocity), 속도 반폭(Half-width of Velocity), 경계 반폭(Half-width of Boundary)

1. 서 론

분류에 대한 연구는 오랜 기간 동안 이루어져 왔으며 그 기하학적 단순성으로 인하여 유체 및 연소공학을 포함하는 여러 분야에 이용되고 있다. 층류 축대칭 분류에서 완전 발달된 구간에 대한 속도분포는 속도장의 상사성을 가정한 여러 상사해가 제시되어 왔으며, 국부중심속도에 대한 많은 실험과 수치해석 및 이론적 연구가 이루어져 왔다[1-4]. 신뢰성 있는 고성능 절삭유체 공급장치와 같은 노즐의 기술개발에 있어서 분류의 유체역학적 검토는 무엇보다도 중요하며[5,6], 이와 같이 유체역학적으로 분류의 거동을 명확히 하기 위해서는, 분류의 속도, 난류 분포, 압력 분포 등의 공간적, 시간적인 현상을 알아야 한다. 분류는 노즐 형상, 노즐 출구 유속, 노즐로부터 분출한 뒤의 주위 상황, 주변 유체의 종류와 유동형태 및 유로 형상 등에 따라 유동특성이 다양하다.

평면 형상의 노즐 또는 원형 노즐로부터 분류를 동일 유체의 넓은 정지 공간에 분출하면, 분류는 주위 유체와의 사이에 큰 속도 구배와 유체가 가지는 점성 작용으로, 분류 주위의

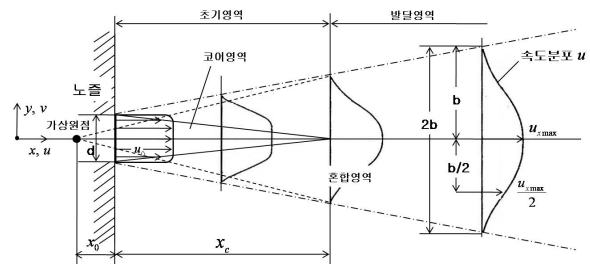


Fig. 1 Flow model of free jet

유체를 말려 들어 분류 폭 b 를 넓히면서 또한 분류 자신은 속도를 감소시키면서 하류로 흐른다. Fig. 1은 자유 분류의 개략도를 나타내며, 여기서, x , y 는 각각 분류의 축 방향과 그 직각 방향의 좌표축을, u , v 는 각각 x , y 방향의 평균 속도성분이다.

이 그림에서와 같이 분류는 노즐 근방과 그 하류의 두 영역으로 나누어진다. 노즐 근방의 영역은 초기영역 또는 천이영역 (initial or transition region)이라고, 중심에서 속도가 감소하지 않는 퍼텐셜 코어 영역 (potential core region)과, 분류와 주위 유체가 혼합하는 혼합 영역 (mixing region)이 존재한다. 노즐 출구에서 하류로 갈수록 혼합 영역이 y 방향으로 확대되고, 코어 영역이 축소해 마침내 없어진다. 이보다 하류

¹ 학생회원, 창원대학교 대학원 기계공학과

² 정회원, 창원대학교 기계공학과

* Corresponding author, E-mail: brshin@changwon.ac.kr



영역은 발달 영역(developed region)으로, 속도 분포 u 를 최대 유속 u_{\max} 와 반폭 $b/2$ 로 무차원화 하여 표기하면, 상사 분포가 형성된다. 분류 폭 b 는, 분류외연(속도 u 가 0이 되는 $\pm y$ 의 위치)의 거리를 말하며, 발달 영역에서 분류 외연을 상류측에 연장하면 한 점에서 교차하게 되는데 이 점을 가상 원점(hypothetical origin)이라 하고, 거기서 노즐 출구까지의 거리를 가상 원점 거리 x_0 라 한다. 이렇게 하면, 분류를 한 점에서 분출하고 있는 유동으로 다룰 수 있고, 상사 속도 분포를 갖는 발달 영역에서의 분류 거동을 고찰하는데 편리하며, 본 연구에서는 SMAC해법[7]을 이용하여 2차원 자유분류유동을 수치해석하고, 여러 속도 무차원수를 이용한 분사 각, 분류 폭, 가상원점등의 자유분류의 유동특성에 대하여 알아본다.

2. 수치해석

2.1 수치해법

본 연구에서는 2차원 비압축성 자유분류 유동을 알아 보기 위하여 SMAC 차분 해법을 적용하여 해석하였다.

비압축성 유동의 기초방정식은 다음과 같은 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식이다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

본 연구에서 사용한 수치해법은 SMAC(Simplified MAC)해법이며, 수치해석을 위한 차분 방정식은 다음과 같다[8].

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla p^n + (\nu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u})^n \quad (3)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla \phi \quad (4)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (5)$$

$$p^{n+1} = p^n + \phi \quad (6)$$

여기서 \mathbf{u} 는 속도 p 는 압력을 나타내며 $\phi (= p^{n+1} - p^n)$ 는 압력의 수정량, 위첨자 n 은 시간간격을, $*$ 는 시간 n 과 $n+1$ 의 중간 단계의 값을 나타낸다.

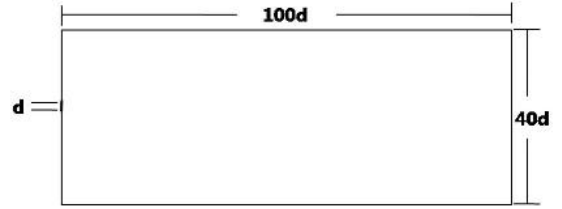


Fig. 2 Computational domain

SMAC해법의 계산에서는 물리량 u, v, p 를 서로 다른 점에 정의하는 엇갈린 격자를 이용한다. 물리량을 모두 같은 점에 정의하는 정규 격자에 비하여 연속방정식을 만족하는 p 의 차분식이 하나의 격자 셀에 정확하게 표현되므로 이산오차가 적고 p 에 대한 수치진동의 발생을 막을 수 있는 이점이 있다 [9].

2.2 경계조건

계산영역으로서는, 자유 분류의 발달과정 및 노즐출구속도 분포 등을 확인하기 위하여 자유분출 영역을 노즐 직경 d 에 대하여 노즐 중심에서 상하방향으로 각각 $20d$ 유동 분출방향으로 $100d$ 의 크기를 가지며, 데카르트 좌표계의 정사각 직교 격자(400×1000)를 활용하였다.

경계조건으로는 노즐 입구부에는 완전 발달된 유동이 유입 되는 것으로 하여 Poiseuille 유동분포를 적용하였으며, 출구부에는 압력 일정의 Dirichlet 조건을 주었다. 노즐의 상하영역은 no-slip조건과 압력에 대한 Neumann조건을 주었다. 또한 작동 유체는 25°C 의 공기이며, Reynolds(Re)수는 입구 평균속도 및 노즐의 직경 d 를 기준으로 정의하였다.

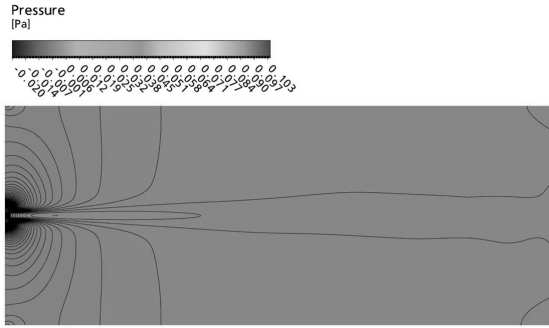
3. 수치해석 결과

Fig. 3은 $Re=100$ 일 때의 선단부 노즐의 유동해석결과로써 각각 속도, 압력분포 및 x 축의 각 단면($1d, 2d, 4d, 7d, 11d, 15d$)에서 속도 벡터 결과를 나타내고 있다.

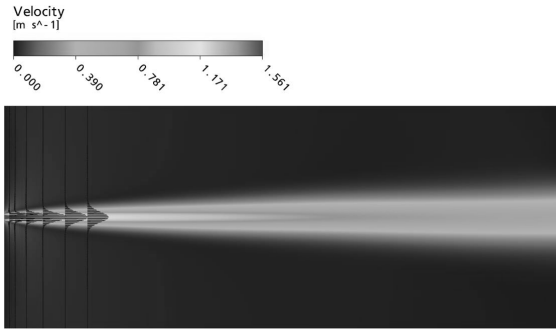
출구 초기영역에서 비교적 큰 압력구배를 가지고 있으며, 하류방향으로 흘러감에 따라 압력구배가 감소하며 대기압하의 공간에 자연스럽게 분출된다. 반면 속도 분포는 하류로 흘러갈수록 점차 속도가 감소되어가는 것을 알 수 있다. 또한 분류의 폭도 하류로 흘러갈수록 감소된다.

자유 분류 유동특성을 확인하기 위하여 다음과 같은 y 방향의 무차원 속도 분포식을 이용하기로 한다.

$$\frac{u_x}{u_{\max}} = f\left[\frac{y-b/2}{x}\right] \quad (7)$$



(a) Pressure distribution



(b) Velocity distribution

Fig. 3 Numerical results at Re=100

$$\frac{u_x}{u_{\max}} = f\left[\frac{y(u_x)}{y(b/2)}\right] \quad (8)$$

위 식 (7), (8)에서 $b/2$ 는 각 단면에서 y 방향으로 축 방향 (x 방향)속도가 0이 되는 위치, 즉 경계폭의 반이 되는 위치의 속도를 나타내는 경계반폭(식 (7)), 혹은 y 방향 중심속도의 반이 되는 반경방향의 위치에서 속도로 정의되는 속도 반폭(식 (8))으로 정의된다[10].

Fig. 4-7은 각각 무차원 속도를 이용한 속도분포의 중첩성을 보여주며, Fig. 4는 속도반폭, Fig. 5-7은 경계반폭을 사용하였다. 대부분 영역에서 속도 상사성을 만족하고 있으나, Tophat 형태의 속도 분포를 보이는 초기영역 1d와 2d에서는 상사성을 크게 벗어남이 확인된다. Fig. 4, 5의 비교에서 상사성은 경계반폭의 경우가 다소 민감하며 Fig. 5,6의 Re수에 따른 비교에서는 거의 차이가 없다. 초기영역을 제외한 영역에서는 가우시안(Gaussian)형태의 속도분포를 가지며 속도의 상사성을 보여준다.

대부분 영역에서 속도 상사성을 만족하고 있으나, Tophat 형태의 속도 분포를 보이는 초기영역 1d와 2d에서는 상사성

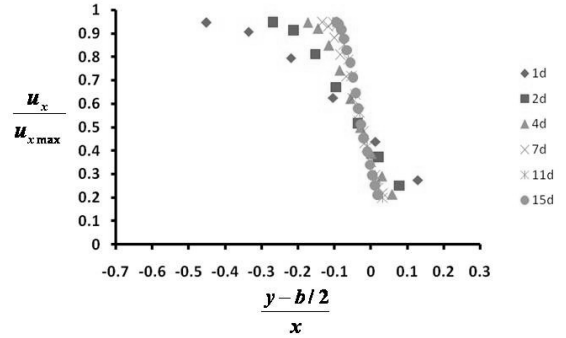


Fig. 4 Similarity of axial velocity profiles with the half-width of velocity at Re=100

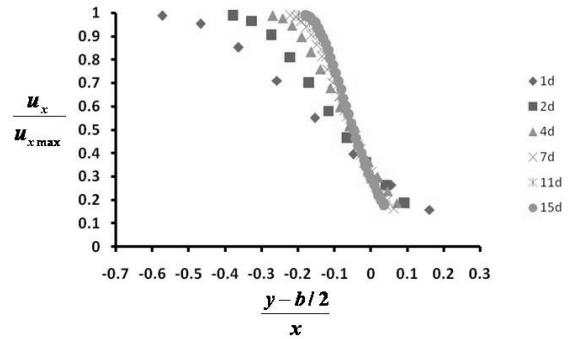


Fig. 5 Similarity of axial velocity profiles with the half-width of boundary at Re=100

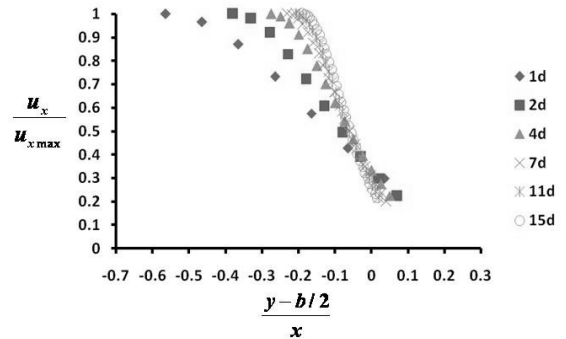


Fig. 6 Similarity of axial velocity profiles with the half-width of boundary at Re=30

을 크게 벗어남이 확인된다. Fig. 4,5의 비교에서 상사성은 경계반폭의 경우가 다소 민감하며 Fig. 5,6의 Re수에 따른 비교에서는 거의 차이가 없다. 초기영역을 제외한 영역에서는 가우시안형태의 속도분포를 가지며 속도의 상사성을 보여준다.

다음에 자유분류 유동특성에 대한 신뢰성을 검증하기 위해

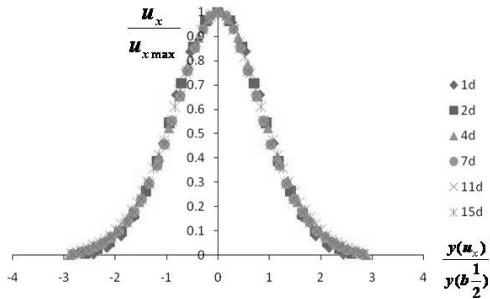


Fig. 7 Similarity of axial velocity profiles with the half-width of boundary at Re=100

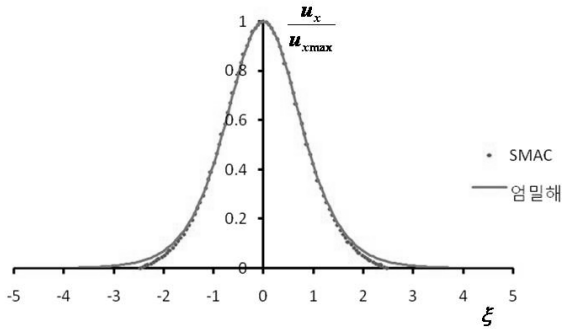


Fig. 8 Comparison of axial velocity with exact solution for Re=100 at 11d downstream section

여 다음과 같은 엄밀해[11]와 비교하였다.

$$u = 0.4543 \left(\frac{K^2}{\nu x} \right)^{\frac{1}{3}} (1 - \tanh^2 \xi) \quad (9)$$

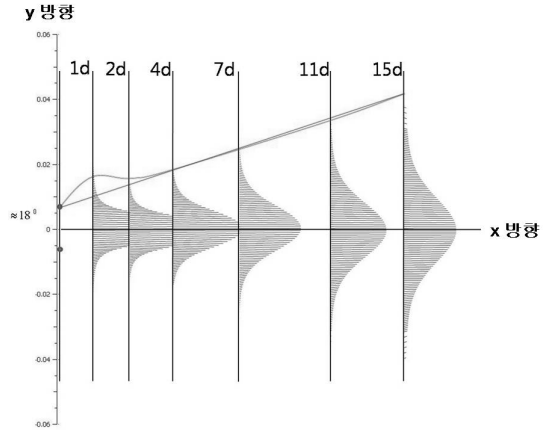
$$\xi = 0.2752 \left(\frac{K}{\nu^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{y}{x^{2/3}} \quad (10)$$

여기서 ν 는 동점성계수 K 는 동운동량이다.

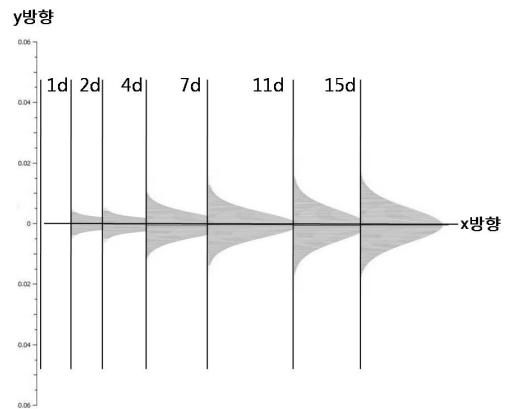
Fig. 8은 Re=100 유동에 대하여 11d 하류의 단면에서 엄밀해와의 비교로 속도의 중첩성을 보여준다. SMAC해법에 의한 예측치와 엄밀해가 거의 일치함을 알 수 있다.

Fig. 9는 Re=30, 100일 때 유동의 분출방향(x) 각 단면에서의 속도분포를 나타낸다. 속도 분포는 하류로 갈수록 초기영역의 Tophat형에서 중심속도가 점차 감소하면서 가우시안분포 형태로 변형되고 있다.

분출 각도는 각 단면의 속도분포가 0이 되는 위치를 연결하여 구할수 있는데, Re=30일경우 약 18°, Re=100인 경우 6.2°로 예측되었다. x=1d에서 유동의 분사각이 급격히 증가하였다



(a) Re=30



(b) Re=100

Fig. 9 Axial velocity at each x plane

가 줄어드는 분포를 가지는데 이러한 현상은 노즐 출구에서 분출되는 유동과 대기 중에 정지해 있는 유동과의 큰 속도구배에 따른 내향류의 발생으로 보여진다. 또한 하류로 흘러갈수록 다시 외향류가 되었다가 점차 가우시안분포로 회복됨을 알 수 있다.

Table 1은 각각의 Re에 따른 가상원점과 분출각도를 나타

Table 1 Hypothetical origin and jet angle obtained SMAC scheme

SMAC	Re=30		Re=100	
	가상원점	분출각도	가상원점	분출각도
경계 폭	-1.5d	18°	-5.8d	6.2°
경계반폭	-3.16d	9°	-9.2	3.14°
속도반폭	-5.01d	5.7°	-12.4	2.3°



낸다. $Re=30$ 일 때 경계 폭을 이용한 가상원점은 약 $-1.5d$ 이며 속도반폭과 경계반폭인 경우는 각 각 $-3.16d$, $-5.01d$ 이다. Re 수가 클수록 분출각과 분류폭이 작아지며 가상원점은 더 멀어진다.

4. 결 론

본 연구에서는 신뢰성 있는 고성능 노즐의 기술개발에 있어 중요한 자유분류의 유동을 SMAC 해법을 이용하여 조사하였다. 그 결과 무차원 속도 분포 및 분사 각, 분류 폭, 가상원점 등 자유분류의 유동특성을 잘 알 수 있다. 또한 무차원 속도분포의 상사성은 초기 이후 영역에서 성립하며, 엄밀해와의 비교 시에도 거의 일치함을 보였다. $Re=30$ 과 100 을 비교했을 때 층류유동범위에서 Re 가 클수록 가상원점은 점점 더 멀어진다.

후 기

본 논문의 일부분은 수중 운동체 특화 연구센터(UVRC)의 지원을 받아 연구되었음. 이에 관계자 각 위에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] 1983, Arulraja, M., Rankin, G.W. and Sridhar, K., "Maximum Velocity Decay in a Submerged Laminar Jet Issuing from a Long Tube," *Transactions of the CSME*, Vol.7, pp.41-43.
- [2] 1974, Dmitriev, V.N. and Kulesova, N.A., "The Calculation of a Laminar Jet in the Surrounding of the Supply Nozzle," *Proceedings of the Jablonna Fluidics Conference*, Budapest, Hungary.
- [3] 1998, Rankin, G.W., Sridar, K., Arulraja, M. and Kumar, K.R., "An Experimental Investigation of Laminar Axisymmetric Submerged Jets," *J. Fluid Mech.*, Vol.133, pp.217-231.
- [4] 1972, Rankin, G.W. and Hsieh, T., "Numerical Solution of Laminar Jet Mixing With and Without Free Stream," *Appl. Sci. Res.*, Vol.27, pp.39-62.
- [5] 2004, Yuet, Y. et al., "Character and Behavior of Mist Generated by Application of Cutting Fluid to a Rotating Cylindrical Workpiece, Part 1: Model Development," *ASME, J. of Manuf. Sci. Eng.*, Vol.126, pp.417-425.
- [6] 2006, 안승일 외 7인, "초미량 오일 필름 코팅기술을 이용한 절삭 유체 공급 장치 개발," *산업기술 개발 사업 보고서*, 산업 자원부.
- [7] 1970, Amsden, A.A. and Harlow, F.H., "A Simplified MAC Technique for Incompressible Fluid Calculation," *J. Comput. Phys.*, Vol.6, pp.322-325.
- [8] 1991, Ikohagi, T. and Shin, B.R., "Finite-Difference Scheme for Steady Incompressible Navier-Stokes Equations in General Curvilinear Coordinates," *Computers & Fluids*, Vol.19, pp.479-488.
- [9] 1993, Daiguji, H. and Shin, B.R., "Some Numerical Schemes using Curvilinear Coordinate Grids for Incompressible and Compressible Navier-Stokes Equation," *Sadhana*, Vol.18, Parts 3-4, pp.431-476.
- [10] 1992, Kim, D.S. and Han, Y.O., "The Study over the Fkwo Characteristic of an Axisymmetric Free Jet in the Initial Region," *KSAS J.*, Vol.20, pp.95-104.
- [11] 1979, Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, pp.179-183.