

피라미드 네트워크의 메쉬 부그래프에서의 간선 특성

장정환*

*부산외국어대학교 디지털미디어학부

e-mail: jhchang@puufs.ac.kr

An Edge Property in Mesh Sub-graphs of Pyramid Network

Jung-Hwan Chang*

*Division of Digital Media Engineering, Pusan University of Foreign Studies

요 약

피라미드 그래프는 정방형 메쉬와 트리 구조를 기반으로 하는 상호연결망 토폴로지다. 정방형 메쉬 내에서 NPC-간선은 해당 메쉬를 피라미드의 부그래프 관점에서 해석할 때 NPC-간선의 양 끝 노드들의 부모 노드들이 상위 계층의 메쉬 부그래프 내에서 서로 인접하게 되는 간선으로써 사이클 확장이나 고장허용 특성의 관점에서 중요한 의미를 갖는 간선이다. 본 연구에서는 $2^n \times 2^n$ 2-차원 정방형 메쉬 내에서 헤밀톤 사이클 구성 시 포함할 수 있는 NPC-간선 개수의 하한값이 2^{2n-2} 임을 분석한다.

1. 개요

대규모 병렬처리시스템을 구성하고 있는 다중 프로세스들의 연결 상태는 상호연결망(interconnection network) 그래프로 모델링 될 수 있으며, 그 성능은 해당 그래프의 이론적인 특성에 의존적이라는 사실이 알려져 있다[1,2].

2차원 메쉬(2-dimension mesh)(또는 grid)는 가장 잘 알려진 상호연결망 모델 중 하나로써 구조가 단순하여 확장성이 뛰어나고 뿐만 아니라 효율적인 평면배치(layout) 등의 장점을 갖는 것으로 알려져 있다.

높이 N 인 피라미드(pyramid)는 각 계층이 4^k 형태의 크기를 갖는 서로 다른 메쉬 구조를 부그래프로 보유하고 있는 N 개의 계층적 구조로 이루어짐으로써 자연스럽게 픽셀 단위 영상처리 등과 같이 계층적 데이터 처리모형을 갖는 멀티미디어 응용분야 등에 효율적인 것으로 알려져 있을 뿐만 아니라 내재된 트리(tree) 및 메쉬(mesh) 구조의 특성을 활용한 그래프 관련 문제들의 해결에도 유용한 것으로 알려져 있다[3,4,5,6].

한편 상호연결망 그래프에 내재된 사이클 특성과 관련된 연구들은 다중컴퓨터 병렬처리시스템에서 사이클 기반의 방송 또는 멀티캐스팅 형태의 메시지 전달과 관련된 응용분야에서 활용하고 있는 것으로 알려져 있다[7].

본 논문에서는 피라미드 그래프의 기본 구조를 형성하고 있는 크기 $2^n \times 2^n$ 인 2차원 정방형 메쉬 그래프에서 헤밀톤 사이클을 구성함에 있어서 특별한 의미를 갖는 간선들을 얼마나 많이 포함시킬 수 있는지 그 개수의 하한 및 상한값을 분석함으로써 사이클 확장 및 고장허용과 관련된 그래프 특성 분석에 활용 가능한 연구 결과를 제시한다.

본 논문에서는 그래프 내의 동일 계층 간선들을 상위 계

층에서의 인접 관계 유지 여부에 따라 두 종류의 간선들로 분류하는데 특별히 상위 계층에서도 인접노드 관계를 유지하는 간선들에 초점을 맞추어 해당 간선의 하한값을 분석하게 된다. 이는 간선에서의 고장 허용 정도를 간접적으로 분석해보기 위한 목적이다.

본 논문은 3개의 장으로 구성되는데, 이어지는 2장에서 본 논문의 주요 결과를 그래프 내의 간선 특성을 분석하여 증명하며 마지막 3장에서 결론을 맺는다.

2. 본론

2.1 기본 그래프 특성

본 절에서는 주요 연구 대상 그래프들의 정의와 특성들을 살펴보고자 한다.

[정의 1] 한 변의 길이가 $2^n (n \geq 2)$ 인 2차원 정방형 메쉬(regular square mesh)(줄여서 2^n -정방형 메쉬) SM^n 는 노드(node)의 집합 $V(SM^n)$ 과 간선(edge)의 집합 $E(SM^n)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다((그림 1) 참조).

- 1) $V(SM^n) = \{ (x,y) \mid 0 \leq x,y < 2^n \}$
- 2) $E(SM^n) = \{ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid |x_1-x_2| + |y_1-y_2| = 1 \}$

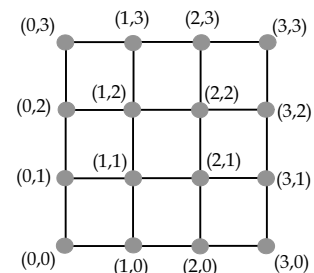


그림 1. 2^2 -정방형 메쉬 SM^2

[정의 2] 높이(height)가 $N(N>2)$ 인 피라미드 그래프(pyramid graph) P^N 은 노드의 집합 $V(P^N)$ 와 간선의 집합 $E(P^N)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다((그림 2) 참조).

$$1) V(P^N) = \bigcup_{0 \leq l \leq N-1} \{(l, x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 2^{N-l} - 1\}$$

$$2) E(P^N) = \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{(l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2) \mid |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1 \ \&\& \ (l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2) \in V(P^N)\} \cup \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{(l, x, y), (l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor) \mid 0 \leq x, y < 2^{N-l}\}$$

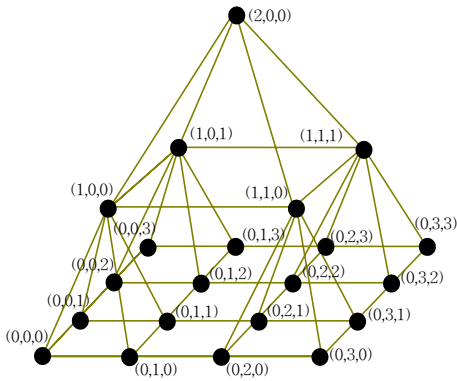
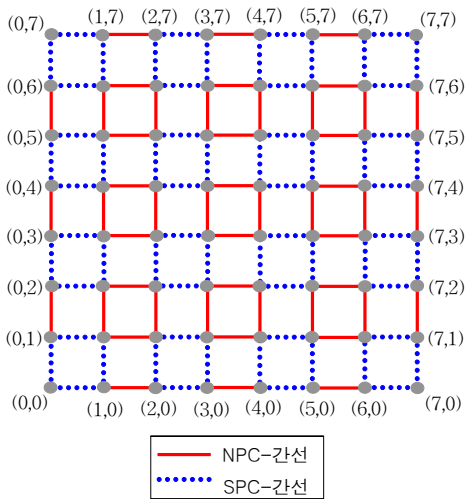
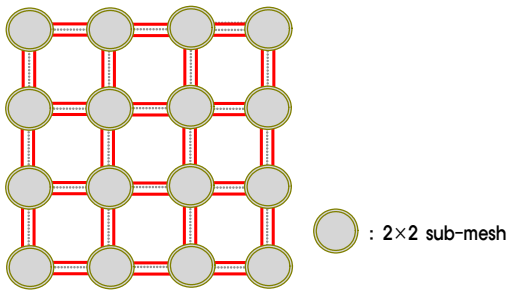


그림 2. 높이 3인 피라미드 그래프 P^3



(a) 원 그래프 표현



(b) 압축 그래프 표현

그림 3. 메쉬 SM^3 내의 NPC-간선 및 SPC-간선

[정의 3] 임의의 그래프(graph) $G=(V,E)$ 에서의 경로(path)란 시작 노드 v_1 로부터 연속하여 인접된 간선을 따라 연속적으로 나열된 노드들의 정렬 $(v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n)$ 을 의미하며, 특별히 간선의 중복 방문이 허용되지 않도록 각 구성 노드들의 분지수(degree)가 최대 2로 제한된 경로를 단순 경로(simple path)라고 일컫는다. 특별히 시작 노드와 마

지막 노드 간에 연결 간선을 갖는 닫힌 단순 경로(closed simple path)를 사이클(cycle)이라고 하며 그래프 내의 모든 노드들을 포함하는 최대 길이의 단순경로를 해밀톤 사이클(Hamiltonian cycle)이라고 한다.

[정의 4] 피라미드 그래프 $P^N(N>2)$ 의 계층 l 을 형성하고 있는 부그래프(sub-graph)에 해당하는 2^{N-l} -정방형 메쉬 S 내에 소속된 간선 $e=((l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2))$ 의 양 끝 노드에 해당하는 두 노드 (l, x_1, y_1) 와 (l, x_2, y_2) 가 아래의 조건 중 하나를 만족하는 경우에 간선 e 를 인접-부모 간선(neighbor-parent edge)(줄여서 NP-간선)이라고 한다.

- (1) $|\lfloor x_1/2 \rfloor - \lfloor x_2/2 \rfloor| = 1 \ \&\& \ y_1 = y_2$
- (2) $|\lfloor y_1/2 \rfloor - \lfloor y_2/2 \rfloor| = 1 \ \&\& \ x_1 = x_2$

n -계층 피라미드 P^n 의 임의 계층 $l (< n-1)$ 을 구성하고 있는 부그래프에 해당하는 $2^{n-l} \times 2^{n-l}$ -정방형 메쉬 S 에 속한 간선 $e=(u,v)$ 가 NP-간선이라는 의미는 e 의 양 끝 노드 u 및 v 와 각각 인접하고 있는 차상위 계층 $l+1$ 에 속한 두 노드가 인접되어 있다는 뜻으로 해석할 수 있다. 그리고 S 에 속한 간선들 중 NP-간선들을 제외한 나머지 간선들은 공통-부모 간선(shared-parent edge)(줄여서 SP-간선)으로 분류된다.

한편 이러한 개념 자체는 피라미드 그래프 내에서만 의미를 갖는 개념이지만 논문 전개의 편의를 위해 정방형 메쉬 그래프를 대상으로 하는 논문 내용 전반에 걸쳐 메쉬 내에 존재하는 간선들에게로 이러한 개념을 확장시키는 과정에서 혼란을 방지하기 위해 메쉬에서는 NP-간선 및 SP-간선을 대신하여 각각 인접-부모 후보 간선(neighbor-parent candidate edge)(줄여서 NPC-간선) 및 공통-부모 후보 간선(shared-parent candidate edge)(줄여서 SPC-간선)이라고 명명하기로 한다((그림 3) 참조).

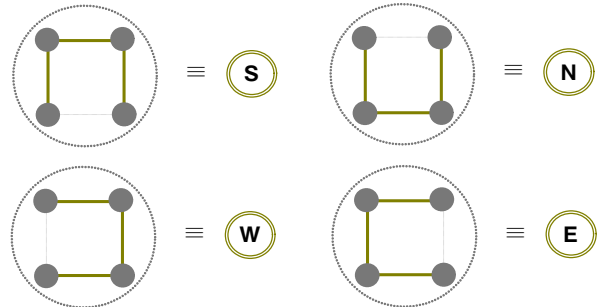


그림 4. 압축 그래프 표현에서의 노드 구성 예

[정의 5] 2^n -정방형 메쉬 그래프의 축소 그래프(shrunked graph)란 원 그래프에서 2×2 정방형 메쉬 부그래프들을 하나의 슈퍼-노드(super-node)의 개념으로 축소시켜 재구성한 축소형 그래프를 의미하는데, 이 과정에서 간선들은 축소가 되지 않아 결과적으로 축소 그래프에서는 슈퍼-노드와 슈퍼-노드 상호간에 여러 개의 간선이 존재할 수 있으므로 단순 그래프(simple graph)로 분류할 수 있는 범주를 벗어난 초 그래프(hyper graph) 형태가 된다. 이러한 축소 그래프 개념을 도입함으로써 원 그래프의 SPC-간선들은 슈퍼-노드 내부로 숨어버리는 결과를 초래함에 따라 NPC-간선들만 부각시킬 수 있는 장점이 있다((그림 3) 및 (그림 4) 참조).

2.2 피라미드의 메쉬 부그래프 간선 특성

본 절에서는 피라미드 그래프의 기반 구조를 형성하고 있는 2^n -정방형 메쉬에서의 NPC-간선들의 특성을 분석하고자 한다.

NPC-간선들은 메쉬 그래프 자체만을 고려할 때에는 SPC-간선과 동등하게 여러 간선들 중 하나일 뿐이지만 피라미드 그래프로 확장된 이후에는 (그림 1)과 (그림 2)에서 알 수 있는 바와 같이 NPC-간선들의 경우는 동일 계층이나 하위 계층은 물론이고 상위 계층을 통해서도 우회 가능성이 따라 사이클 구성의 확장 가능성 및 고장 허용 특성 등의 관점에서 중요한 의미를 갖는다.

2^n -정방형 메쉬에서 해밀톤 사이클 구성이 가능한 기본 알고리즘을 참조하여 NPC-간선의 변화량을 분석한다.

[보조정리 1] $n \geq 2$ 를 만족하는 2^n -정방형 메쉬 SM^n 내에서 구성 가능한 해밀톤 사이클에 포함될 수 있는 NPC-간선의 최소 개수는 2^{2n-2} 개이다.

[증명] (그림 5)에 주어진 $n=3$ 인 경우를 참조하여 일반적인 n 의 경우로 확장하는 방식으로 NPC-간선의 변화량을 분석하는데, 메쉬의 대칭성(symmetric property)을 이용하면 모양은 다르지만 서로 동형(isomorphic)인 다양한 구성이 가능하다.

해밀톤 사이클을 구성하는 다양한 방법 중에서도 NPC-간선들을 가능한 적게 포함되도록 구성하기 위한 전략이 필요하다.

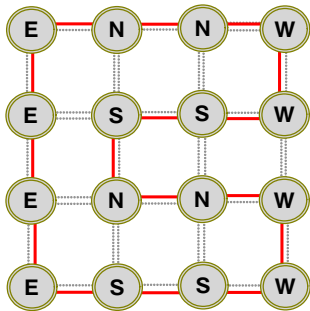


그림 5. SM^3 에서의 최소 NPC-간선 보유 해밀톤 사이클 구성 예

(그림 5)에 주어진 특수한 경우를 바탕으로 일반적인 경우로 확장시키는 기법을 이용하여 임의의 SM^n 을 대상으로 해밀톤 사이클 구성 시 포함될 NPC-간선들의 유형을 행-간선과 열-간선으로 나누어 분석한다.

- (1) 열-간선은 다음과 같이 표현되는 세 부분 NPC-간선 그룹들의 합으로 표현할 수 있다.
 - ① $\{((1,2j+1),(1,2j+2)) \mid 0 \leq j < 2^{n-1}-1\}$
 - ② $\{((2,4j+3),(2,4j+4)) \mid 0 \leq j < 2^{n-2}-1\}$
 - ③ $\{((2^n-2,4j+1),(2^n-2,4j+2)) \mid 0 \leq j < 2^{n-2}\}$
- (2) 행-간선 역시 다음과 같이 표현되는 네 부분 NPC-간선 그룹들의 합으로 표현할 수 있다.
 - ① $\{((2i+1,0),(2i+2,0)) \mid 0 \leq i < 2^{n-1}-1\}$
 - ② $\{((2i+1,4j),(2i+2,4j)) \mid 1 \leq i < 2^{n-1}-1 \ \&\& \ 0 \leq j < 2^{n-2}-1\}$
 - ③ $\{((2i+1,4j+3),(2i+2,4j+3)) \mid 1 \leq i < 2^{n-1}-1 \ \&\& \ 0 \leq j < 2^{n-2}-1\}$
 - ④ $\{((2i+1,2^j-1),(2i+2,2^j-1)) \mid 0 \leq i < 2^{n-1}-1\}$

따라서 열-간선의 합과 행-간선의 합을 각각 S_c 과 S_r 라고 하면 이들은 다음 식으로 계산 가능하다.

$$S_c = (2^{n-1}-1) + (2^{n-2}-1) + (2^{n-2}) = 2^n-2$$

$$S_r = 2*(2^{n-1}-1) + 2*(2^{n-2}-1)*(2^{n-2}) = 2^{2n-2}-2^n+2$$

따라서 최종적으로 해밀톤 사이클에 남아있는 NPC-간선들의 개수는 S_c 와 S_r 의 합에 해당하므로 최악의 경우에도 2^{2n-2} 개는 존재하게 됨을 확인할 수 있다. □

위의 분석과정을 통해 확인한 결과는 2^n -정방형 메쉬를 기본 그래프 구조로 내포하고 있는 피라미드 상호연결망 등의 사이클 구성 시 확장 가능성이나 고장 허용 관련 특성 등을 분석하는데 의미가 있을 것으로 판단된다.

3. 결론

본 논문에서는 상호연결망 위상 중의 하나인 피라미드 그래프의 기반을 이루고 있는 그래프의 관점에서 2차원 메쉬 그래프에 내재된 간선 특성을 분석하였다.

메쉬 그래프의 간선들은 메쉬 자체에서는 동등한 의미를 갖지만 피라미드 그래프의 부그래프로서의 관점에서는 상위 메쉬 부그래프에 존재하는 부모 노드들의 연결 형태에 따라 동일 부모를 공유하는 경우(SPC-간선)와 인접된 부모를 갖는 경우(NPC-간선)의 두 부류로 나눌 수 있는데 2^n -정방형 메쉬에서 해밀톤 사이클 구성 시 포함가능한 NPC-간선 개수의 하한값이 2^{2n-2} 임을 보였다. 메쉬에서 NPC-간선들이 갖는 의미는 해당 메쉬가 피라미드 그래프의 부그래프로서 동작할 때 사이클 확장 및 고장-허용 특성과 관련하여 다양성과 융통성을 제공한다는 관점에서 중요한 의미를 갖는다.

참고문헌

- [1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.4, pp.439-458, 1987.
- [2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," *Computing Supplement*, Vol.7, pp.257-282, 1990.
- [3] R. Miller and Q. F. Stout, "Data Movement Techniques for the Pyramid Computer," *SIAM J. on Comput.*, Vol.16, No.1, pp.38-60, 1987.
- [4] Q. F. Stout, "Mapping Vision Algorithms to Parallel Architectures," *Proc. of the IEEE*, pp.982-995, 1988.
- [5] K. -L. Chung and Y. -W. Chen, "Mapping Pyramids into 3-D Meshes," *Nordic J. of Computing*, Vol.2, No.3, pp. 326-337, 1995.
- [6] 장정환, "피라미드의 3-차원 메쉬로의 신장을 개선 임베딩", 정보처리학회논문지-A, Vol.10-A, No.6, pp.627-634, 2003.
- [7] Y. C. Tseng, D. K. Panda and T. H. Lai, "A Trip-based Multicasting Model in Wormhole-routed Networks with Virtual Channels," *IEEE Trans. on Paral. and Distrib. Sys.*, Vol.7, No.2, pp. 138-150, 1996.