

이송되는 컵 형상에 따른 자유표면의 거동 특성에 관한 연구

김 윤 선, 홍 태 협, 김 창 녕*

경희대학교 대학원 기계공학과, *경희대학교 기계공학과 (산학협력 기술연구원)

A Study on the Behavior of the Free Surface in a Moving Cup of Different Shape

Yun Sun Kim, Tae Hyub Hong, Chang Nyung Kim**

Department of Mechanical Engineering, Graduate school, Kyung-hee University, Yong-in 446-701, Korea

*Department of Mechanical Engineering, Kyung-hee University (Industrial Liaison Research Institute), Yong-in, 446-701, Korea

(Received ; revision received)

ABSTRACT: A manipulator is operated for the motion of mechanical hands or arms. When a cup including liquid inside is shifted by a manipulator, it is important to know how a free surface of the liquid moves. In this study, non dimensional parameters have been found that affect the rise of the free surface in a cup moving with constant acceleration. The non-dimensional parameters are the dimensionless time, the ratio of inertia effect to viscous effect (the Reynolds number), aspect ratio of the liquid inside the cup and the acceleration ratio (the Froude number). Through this study, the height of the free surface rise in a cup has been predicted and the detailed velocities in the liquid have been examined. Generally, the maximum rise of the free surface is dependent on the Reynolds number and Froude number strongly, but on the aspect ratio weakly. However, the influence of the aspect ratio on the maximum rise of the free surface is not negligible in the range of $10 < Re < 100$.

Key words: Dimensional analysis(차원 해석), Free surface(자유 표면), Moving cup(움직이는 컵)

기 호 설 명

a : 컵의 가속도의 크기 [m/s^2]
 F : volume fraction
 g : 중력 가속도의 크기 [m/s^2]
 h : 초기 자유표면으로부터의 높이 변화 [m]

H : 초기 자유 표면의 높이 [m]
 R : 컵의 반지름 [m]
 t : 시간 [s]

그리스 문자

θ : 초기 자유 표면과 임의의 시각에서의 자유 표면이 이루는 각
 μ : 점성 계수 [$kg/m \cdot s$]
 ν : 동 점성계수 [m^2/s]
 ρ : 밀도 [kg/m^3]

† Corresponding author

Tel.: 031-201-2869; fax: 031-202-8106

E-mail address: cnkim@khu.ac.kr

τ_{ij} : 전단응력 텐서 [$kg/m \cdot s^2$]

상점자

* : 무차원 변수

하점자

max : 최대값

s : 정상 상태

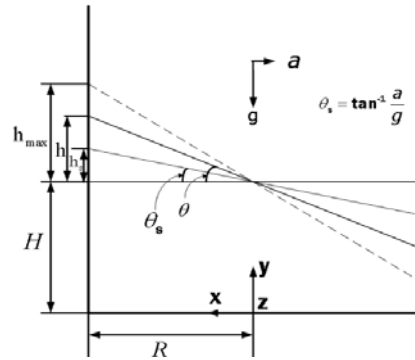


Fig. 1 Schematic diagram of the free surface of a liquid in the cup.

1. 서론

로봇에 의해 윗면이 개방된 용기 속에 들어 있는 유체가 운반될 때, 부적절한 가속 및 급작스런 정지가 발생한다면 유체가 넘치게 될 가능성이 크며 만약 이 유체가 유독성일 경우에 주변 기물을 오염시킬 수 있다. 이런 위험성을 피하고 액체를 안전하게 운반할 수 있도록 로봇은 적절한 제어에 의해 작동되어야 한다. 따라서 컵이 운반되는 상황에 맞게 액체가 넘치지 않도록 자유 표면의 최대 상승 높이가 적절히 제어되려면 자유 표면을 갖는 액체의 거동 특성이 명확히 파악되어야 한다.

컵을 흔드는 경우(sloshing)⁽¹⁻³⁾에 대한 많은 연구가 수행되어 왔으나, 자유 표면은 갖는 개방된 용기(컵) 안에 있는 액체가 가속될 때에 그 액체의 거동에 대한 연구는 거의 이루어지지 않았다.

따라서 본 연구에서는 윗면이 개방된 원통형, 입방형의 용기가 일정한 가속도로 수평방향으로 이동하는 상황에서 자유 표면의 거동에 영향을 주는 무차원 변수가 확인되었고, 3차원, 비정상 수치해석을 통하여 자유 표면의 거동에 미치는 무차원 변수들의 영향이 파악되었다.

2. 연구방법

2.1 무차원 수의 유도

일정한 가속도를 갖는 컵 안에 있는 액체의 자유 표면의 거동에 영향을 미치는 인자들은 $H, h, R, \vec{a}, \rho, \mu, \vec{g}, t$ 이다(Fig. 1). 본 연구에서는 원

통형 컵의 반지름과 입방형 컵의 한 변의 반을 모두 R (반지름)로 표기 하였다. Buckingham pi theorem⁽⁴⁾을 이용하여 자유 표면의 상승(h)에 영향을 미치는 다양한 변수들이 무차원화 되었고 구해진 무차원수들 사이의 관계는 식 (1)과 같이 얻어졌다.

$$\frac{h}{R} = \Phi\left(\frac{\sqrt{at}}{\sqrt{R}}, \frac{a^{1/2}R^{3/2}}{\nu}, \frac{a}{g}, \frac{H}{R}\right) \quad (1)$$

여기에서 좌변의 h/R 는 컵의 반지름에 대한 초기 자유 표면으로부터의 높이 변화(normalized level rise)를 나타내는 변수이다. 우변의 \sqrt{at}/\sqrt{R} 는 무차원 시간, $a^{1/2}R^{3/2}/\nu$ 는 점성 효과에 대한 관성 효과의 비, a/g 는 중력 효과에 대한 관성효과에 대한 비, H/R 는 컵의 반지름에 대한 초기 자유 수면의 높이의 비(aspect ratio)이다. $a^{1/2}R^{3/2}/\nu$ 과 a/g 는 Re 수와 Fr 수로 간주될 수 있다. Re 수는 일반적으로 $V_0 l_0/\nu$, Fr 수는 $V_0^2/g l_0$ 으로 정의되는데 특성속도 V_0 를 \sqrt{aR} , 특성길이 l_0 를 R 로 정의하면 위에서 언급된 Re 수와 Fr 수를 각각 얻을 수 있다. 식(1)과 관련하여 자유 표면의 높이 변화의 최대값인 h_{max}/R 는 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)으로 부르기로 한다.

2.2 수치 해석

2.2.1 수치 해석 모델

본 연구에서 컵 안에 담겨있는 액체의 무차원

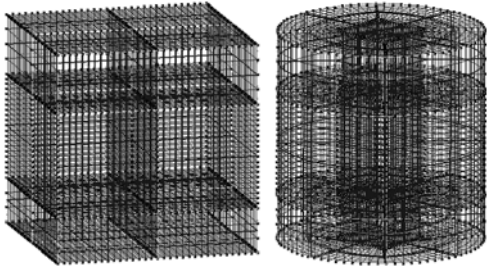


Fig. 2 Computational grid system

최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)에 미치는 여러 인자들의 영향을 파악하기 위해 점성계수와 밀도 등의 물성치가 온도에 따라 크게 변하는 엔진 오일을 관찰 대상의 액체로 고려하였다.

자유 표면에 대한 컵 외부의 공기 흐름의 영향이 무시될 만큼 작다고 가정할 때, 컵은 정지 상태에서 일정한 가속도로 움직이므로 컵 내부의 공기 및 엔진 오일에는 가속도 방향과 반대 방향으로 일정한 관성력이 작용한다. 컵의 가속도와 반대 방향으로 작용하는 가상의 관성력이 유체에 균일하게 작용한다는 가정 아래에서 수치해석이 수행되었다. 여기에서 단위 부피당 엔진 오일이 받는 힘 $-\rho\vec{a}$ 는 음의 x 방향으로, 중력가속도 \vec{g} 는 음의 y 방향으로 작용된다. 그리고 fig. 2에 나타난 바와 같이 해석에 사용된 격자계는 약 24,000개의 정렬 격자로 구성되었고 컵의 바닥면의 중심점(center)을 기준 좌표의 원점으로 하여 수치해석이 수행되었다.

컵 안의 유체영역의 초기 속도는 모두 0이며 컵 벽면의 유동 경계조건을 위하여 점착 조건이 사용되었고, 대기에 개방된 컵 윗면에는 대기압 경계조건이 사용되었다. 그리고 엔진 오일과 벽면의 접촉각은 90° 로 가정되었다.

수치해석에서 사용된 시간간격 Δt 는 0.001초 ~ 0.005초의 범위이고 엔진오일의 Re 수가 클수록 Δt 의 크기는 작게 설정되었다. 이는 같은 시간동안에 Re 수가 클수록, 상대적으로 작은 Re 수에 비해 유체의 거동에 많은 변화가 일어나기 때문이다. 컵이 정지 상태에서 x 방향으로 일정한 가속도 a 로 움직이는 데에 따른 컵 안의 엔진 오일의 유동이 정상상태에 거의 도달하였을 때에 계산이 종료되었다.

가속도 a 와 반지름 R 은 모든 계산에 대해서 $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$, $R_0 = 0.035 \text{ m}$ 로 고정되었다. a 와

Table 1 The Reynolds numbers with different kinematic viscosities of the engine oil($a_0 = 1 \text{ m/s}^2$, $R_0 = 0.035 \text{ m}$).

	$\nu \text{ (m}^2/\text{s)}$	Reynolds number
ν_1	5.452×10^{-6}	1200
ν_2	8.029×10^{-6}	790
ν_3	1.241×10^{-5}	528
ν_4	2.046×10^{-5}	319
ν_5	3.794×10^{-5}	173
ν_6	8.565×10^{-5}	76
ν_7	2.485×10^{-4}	26
ν_8	9.429×10^{-4}	7
ν_9	1.31×10^{-3}	5

Table 2 The aspect ratios with different initial heights of the engine oil ($a_0 = 1 \text{ m/s}^2$, $R_0 = 0.035 \text{ m}$).

	$H \text{ (m)}$	Aspect ratio
H_1	0.01	0.29
H_2	0.02	0.57
H_3	0.03	0.86
H_4	0.04	1.14
H_5	0.05	1.43

R 이 일정하므로 Re의 변화를 위해 ν 가 변화되었고, aspect ratio의 변화를 위해 H 가 변화되었다. 변수 ν , H 의 값이 변화함에 따라 달라지는 Re 수, Aspect ratio가 Table 1, Table 2에 각각 제시되었다. 또한 Fr의 변화를 위해 g 가 각각 20 m/s^2 (Fr = 0.05), 9.81 m/s^2 (Fr = 0.10), 6.67 m/s^2 (Fr = 0.15), 5 m/s^2 (0.20)로 변화하였다.

3. 연구 결과 및 고찰

3.1 무차원 시간에 따른 엔진 오일의 유동특성

무차원 시간에 따른 엔진 오일의 거동에 대한 감쇠 특성이 서로 다른 Re 수에 대하여 원통형 컵의 경우와 입방형 컵의 경우가 Fig. 3과 Fig. 4에 각각 제시되어 있다. 그래프의 가로축은 무차원 시간 \sqrt{at}/\sqrt{R} 을 나타내며 세로축은 컵 왼쪽 벽면과 접촉하는 자유 표면의 무차원 자유표

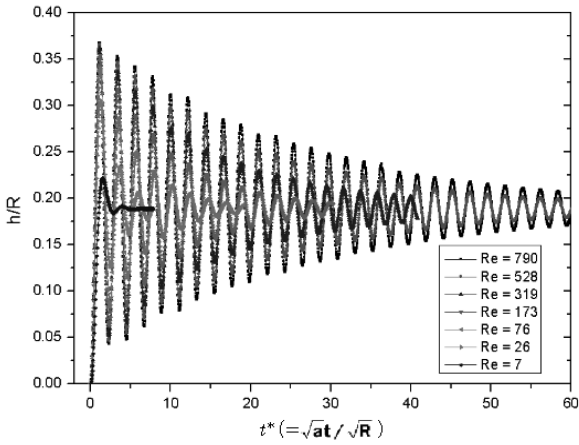


Fig. 3 Variation of the height of the free surface at the left wall in the cylindrical cup ($Fr = 0.20$, Aspect ratio = 0.86).

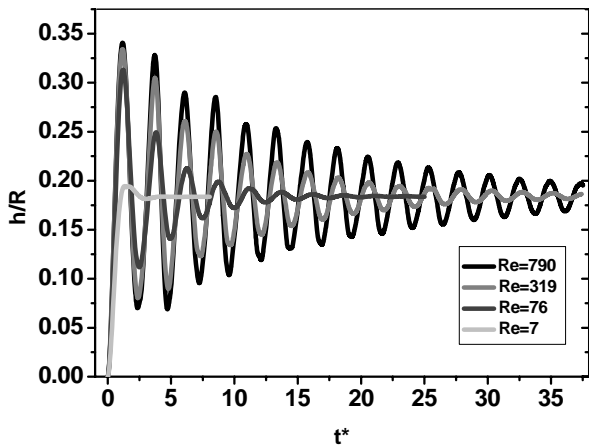


Fig. 4 Variation of the height of the free surface at the left wall in the cubic cup ($Fr = 0.20$, Aspect ratio = 0.86).

면 상승(normalized level rise (h/R))을 나타낸다. Re 수가 작을수록 h/R 의 진폭이 작아지며 짧은 무차원 시간 동안에 h/R 이 일정 값(steady value)에 도달하는 특성을 갖는다. 무차원 시간에 따른 h/R 의 변화는 진폭이 시간에 따라 지수적으로 감소하는 감쇠진동과 유사하다.

Fig. 3과 Fig. 4를 비교해 보면 원통형 컵에 비해 입방형 컵의 경우에 더 빠르게 일정한 값으로 접근한다. 이는 접수 면적이 클수록 유체와 고체 벽면 사이에서 작용하는 마찰력이 커지기 때문이다. 이를 좀 더 정확히 하기 위해 본 연구에서는 단순 입방형 컵보다 접수 면적이 큰 새로운 모델

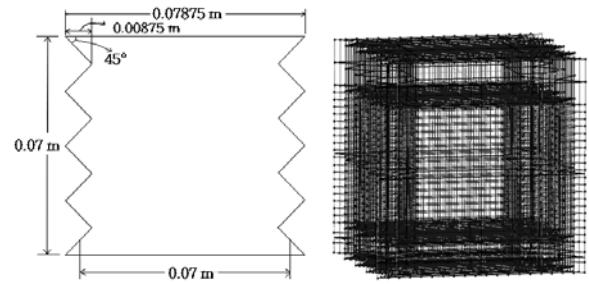


Fig. 5 Computational grid system for the protrusive cup.

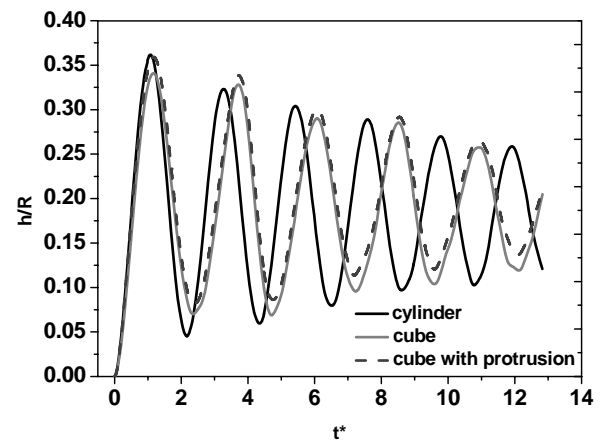


Fig. 6 Variation of the height of the free surface at the left wall in cups of three shape with $Re = 790$.

을 고안하여 수치해석 하였다. Fig. 5에 나타난 컵은 입방형 컵을 토대로 하여 왼쪽 벽과 오른쪽 벽에 돌기를 만들어 입방형 컵보다 접수 면적을 크게 하였고, 전체적인 컵의 부피는 입방형 컵과 돌기가 있는 입방형 컵이 서로 같다. 돌기가 있는 컵을 위에서 내려다보았을 때 돌기의 형태는 삼각형이고 컵의 앞쪽 벽면과 돌기 사이의 각을 45°로 하였다. 이 돌기들은 왼쪽 벽과 오른쪽 벽에 각각 4개씩 위치해 있다.

Aspect ratio 가 0.86이고 Fr 수가 0.20인 상황에서 Re 수가 790일 때 원통형 컵, 입방형 컵, 돌기가 있는 컵에 대하여 무차원 시간에 따른 무차원 액면높이의 변화(컵이 움직이는 방향과 평행하고 컵의 중심을 지나는 수직 단면에서 자유표면의 왼쪽 끝의 액면 높이)에 대한 비교 결과가 Fig. 6에 나타나 있다. 우선 원통형 컵과 입방형 컵을 비교해 보면 첫 주기에서 h/R 의 값이 원통형의 경우가 더 큰 것을 알 수 있다. 그리고 원통형 컵과 입방형 컵의 주기가 서로 다르다. 일

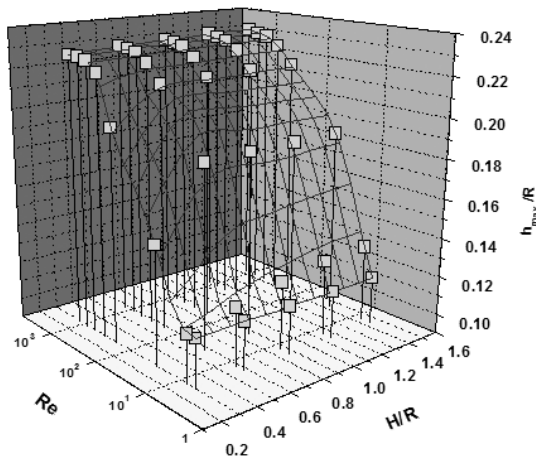


Fig. 7 Effect of the Reynolds number and the aspect ratio on the maximum normalized level rise with $Fr = 0.10$ in the cylindrical cup.

정 무차원 시간 동안의 진동수를 보면 원통형 컵의 경우가 더 많지만 감쇠 폭은 원통형 컵의 경우보다 입방형 컵의 경우가 더 크다. 입방형 컵과 돌기가 있는 입방형 컵을 비교해 보면 주기는 거의 흡사하지만 감쇠 폭은 돌기가 있을 때 더 큰 것을 알 수 있다. 앞서 말했던 것과 같이 접수면적이 큰 컵(돌기가 있는 컵)의 경우가 상대적으로 작은 컵(입방형 컵)의 경우보다 더 빠르게 일정한 값으로 접근하는 것을 볼 수 있다.

3.2 무차원 변수들 간의 관계 고찰

Fr 수가 0.1일 때, Re 수와 aspect ratio의 변화에 따른 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)의 변화가 Fig. 7에 표시되었다. 그림 안의 작은 사각형은 각각 주어진 조건에서 수치해석을 통해 구해진 데이터들을 의미하며 grid로 이루어진 곡면은 그 데이터들에 대한 보간을 통해 얻어졌다. $10 < Re < 100$ 의 범위에서는 Re 수의 증가에 따라 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)은 급격히 증가하지만 $Re > 100$ 인 영역에서는 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)의 증가가 비교적 완만해졌다. 따라서 aspect ratio가 일정할 때 $Re > 100$ 인 영역에서는 Re 수가 무차원 최대 자유표면 상승(maximum normalized level rise)에 대한 영향은 매우

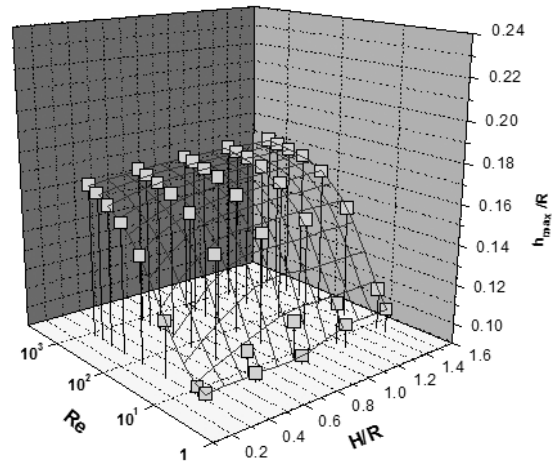


Fig. 8 Effect of the Reynolds number and the aspect ratio on the maximum normalized level rise with $Fr = 0.10$ in the cubic cup.

작다고 할 수 있다.

한편, $10 < Re < 100$ 의 범위에서 (특히 aspect ratio가 0.6보다 작을 때) aspect ratio의 증가에 따라 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)이 크게 증가하는 현상이 나타나지만 그 밖의 범위(Re 수가 상당히 작거나 또는 상당히 큰 범위)에서 aspect ratio의 증가에 따른 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)의 증가는 미미하다. 왜냐하면 Re 수가 매우 큰 경우에는 관성의 영향이, 매우 작은 경우에는 점성의 영향이 각각 엔진 오일의 유동에 대해 지배적으로 작용하고 있기 때문이다.

입방형 컵에서도 원통형 컵과 마찬가지로 $10 < Re < 100$ 의 범위에서는 Re 수의 증가에 따라 무차원 최대 자유표면 상승(maximum normalized level rise)은 증가하지만 $Re > 100$ 인 영역에서는 무차원 최대 자유표면 상승(maximum normalized level rise)의 증가가 비교적 완만해진다(Fig. 8). 따라서 원통형 컵의 경우와 마찬가지로 aspect ratio가 일정할 때 $Re > 100$ 인 영역에서는 Re 수가 무차원 최대 자유표면 상승(maximum normalized level rise)에 대한 영향은 매우 작다고 할 수 있다.

한편, $10 < Re < 100$ 의 범위에서 (특히 aspect ratio가 0.6보다 작을 때) aspect ratio의 증가에 따라 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum

normalized level rise)이 증가하지만, 그 밖의 범위(Re 수가 상당히 작거나 또는 상당히 큰 범위)에서 aspect ratio의 증가에 따른 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)의 증가는 거의 없다고 볼 수 있다.

일반적으로 컵 안에 있는 엔진 오일이 움직일 때에 컵 바닥면과의 마찰 효과를 받는다. 컵 바닥면으로부터 멀리 떨어져 있는 엔진 오일은 컵 바닥면과 가까운 엔진 오일에 비해 컵의 바닥면에 의한 점성의 영향으로부터 상대적으로 자유롭다. 따라서 일반적으로 aspect ratio가 증가할수록 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)이 증가하게 된다.

4. 결 론

본 연구에서는 정지 상태에서 갑자기 어떤 한 방향으로 일정한 가속도를 가지고 움직이기 시작하는 원통형 컵 안에 있는 액체의 자유 표면의 거동 특성이 수치해석의 방법으로 파악되었다. 먼저 액체의 자유 표면의 상승에 영향을 주는 변수들이 무차원화되었다. 차원해석을 통해 얻은 무차원 독립변수는 무차원 시간, 무차원 자유 표면 상승(normalized level rise), Re 수, Fr 수, aspect ratio이다.

정지 상태에 있던 컵이 일정한 가속운동을 하면 컵 내부의 액체(엔진오일)는 진동하는 형태의 거동을 하였다. Re 수가 큰 경우에는 무차원 최대 자유 표면 상승 값이 큰 진폭을 갖는다. 예를 들어 Re 수가 790일 때에는 Re 수가 26일 때보다 수면 높이의 변화가 더 크고 감쇠속도가 느려서 h/R 이 일정 값에 도달하는 데에 더 많은 시간에 소요된다. 또한 접수 면적에 따라 감쇠속도가 다르게 나타났다. 입방형 컵의 경우(상대적으로 접수면적이 작은 경우)보다 돌기가 있는 컵의 경우(상대적으로 접수면적이 큰 경우)에 감쇠속도가 더 빨라서 보다 짧은 시간에 h/R 이 일정 값에 도달하였다.

$10 < Re < 100$ 의 범위에서는 Re 수의 증가에 따라 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)은 급격히 증가하나 $Re > 100$ 의 범위에서는 비교적 완만하게 증가한다. 또 $10 < Re < 100$ 의 범위에서 aspect ratio가 증가함에 따라 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum

normalized level rise)는 증가하지만 aspect ratio의 값이 0.6보다 큰 경우에 그 증가가 매우 작았다. Fr 수가 증가함에 따라 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)은 본 연구에서 다룬 Fr 수의 영역에서 거의 선형적으로 증가하였다. 일반적으로 무차원 최대 자유 표면 상승(maximum normalized level rise)의 변화는 Re 수와 Fr 수에 크게 의존하고 aspect ratio에 작게 의존한다.

산업 현장에서는 뚜껑이 열린 채로 용기 안에 들어 있는 액체가 이송되는 경우가 흔히 발견된다. 본 연구 결과는 유체가 들어있는 컵을 빠르고 안전하게 이송시키는 운반 패턴의 설계에 공헌할 것으로 여겨진다.

참고 문헌

1. S. Papaspyrou, D. Valougeorgis and S.A. Karamanos, 2004, sloshing effects in half full horizontal cylindrical vessels under longitudinal excitation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 71, pp. 255-265.
2. Bang-Fuh Chen and Roger Nokesb, 2005, Time-independent finite difference analysis of fully nonlinear and viscous fluid sloshing in a rectangular tank, *Journal of Computational Physics*, Vol. 209, No. 1, pp. 47-81.
3. R.D. Firouz-Abadi, H. Haddadpour and M. Ghasemi, 2009, Reduced order modeling of liquid sloshing in 3D tanks using boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, No. 6, pp. 750-761.
4. Donald F. Young, Bruce R. Munson Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch, 2007, *A Brief Introduction to Fluid Mechanics*, 4th ed., Willy.