

사각 환형 핀에 대한 1차원과 2차원 해석의 열전달 비교

강형석*

강원대학교 기계메카트로닉스공학부

Comparison of Heat Transfer Between 1-D and 2-D Analyses for a Rectangular Annular Fin

Hyung Suk Kang

Division of Mechanical and Mechatronics Engineering, Kangwon University, Chuncheon 200-701, Korea

ABSTRACT: Heat loss from a convective rectangular profile annular fin with variable inside fluid heat transfer coefficient and fin height is calculated by using both the one dimensional analytic method and two dimensional variables separation method. Heat loss from the two dimensional method and the relative error of heat loss between the one dimensional method and two dimensional method are presented as a function of the fin length, ambient convection characteristic number and fin height. One of the results shows that the relative error of heat loss between one dimensional method and two dimensional method is within 0.7% in the range of given parameters in this study.

Key words: Heat loss(열손실), Analytic method(해석적 방법), Rectangular annular fin(사각 환형 핀)

기호 설명

h : 핀 주위 열대류계수 [$W/m^2 \cdot ^\circ C$]
 h_f : 내부유체 열대류계수 [$W/m^2 \cdot ^\circ C$]
 I_0 : 0계 제1종 modified Bessel 함수
 I_1 : 1계 제1종 modified Bessel 함수
 k : 열전도율 [$W/m \cdot ^\circ C$]
 K_0 : 0계 제2종 modified Bessel 함수
 K_1 : 1계 제2종 modified Bessel 함수
 l : 핀 높이의 반 [m]
 L : 무차원 핀 높이의 반, l/r_i

M : 주위 대류특성계수, ($= hr_i/k$)
 M_f : 내부유체 대류특성계수, ($= h_f r_i/k$)
 q : 핀으로부터의 열손실 [W]
 Q : 핀으로부터의 무차원 열손실
 $\{=q/(2k\phi_b\pi r_i)\}$
 r : 핀 반경 방향 좌표 [m]
 R : 무차원 핀 반경 좌표, r/r_i
 r_b : 핀 바닥 반경 [m]
 R_b : 무차원 핀 바닥 반경, r_b/r_i
 r_e : 핀 끝 반경 [m]
 R_e : 무차원 핀 끝 반경, r_e/r_i
 r_i : 원 관 내부반경 [m]
 T : 온도 [$^\circ C$]
 T_f : 원 관 내부유체 온도 [$^\circ C$]
 T_∞ : 핀 주위 온도 [$^\circ C$]
 z : 핀 높이 방향 좌표 [m]

* Corresponding author

Tel.: +82-33-250-6316; fax: +82-33-242-6013

E-mail address: hkang@kangwon.ac.kr

Z : 무차원 핀 높이 방향 좌표 ($=z/r_i$)

그리스 문자

θ : 무차원 온도, $\{=(T-T_\infty)/(T_f-T_\infty)\}$

λ_n : 고유 값 ($n=1, 2, 3, \dots$)

ϕ_f : 변형된 핀 바닥 온도 [$^{\circ}\text{C}$] ($=T_f-T_\infty$)

하첨자

b : 핀 바닥

e : 핀 끝

f : 원 관 내부유체

i : 원 관 내부반경

∞ : 핀 주위

1. 서론

열전달의 향상을 위하여 핀이 광범위하게 사용되어왔다. 대표적인 예로, 핀은 전자부품의 방열부품, 용기내의 열교환기 그리고 자동차 및 항공기의 엔진 등 많은 분야에서 사용되고 있다.

이와 같이 열전달을 향상시키는 핀에 대한 많은 연구가 이루어져왔고¹⁻³⁾ 연구되어진 핀의 형상도 매우 다양하다. 현재 산업 현장이나 공학적인 응용분야에서 실제 많이 사용되고 있으며 또한 연구가 많이 이루어져 온 핀의 형상중 하나가 환형 핀이다. 이 형상의 핀에 대한 1차원 해석의 예를 들면, Buccini와 Soliman은⁴⁾ 환형 핀에 대하여 하나의 핀 보다는 좀 더 실제적인 핀들의 정렬에 최적화 과정을 적용하였다. 또한 Ullmann과 Kalman은⁵⁾ 질량의 정의된 양에서 환형 핀으로부터 열손실을 증가시키는 문제를 고려하였다. 환형 핀에 대한 2차원 해석으로는 Kundu와 Das가⁶⁾ 타원형의 디스크 핀을 준-해석적인 기법을 사용하여 해석하고 최적화한 반면 Kang과 Look이⁷⁾ 열적으로 비대칭 환형 핀에 대하여 대류와 복사를 고려한 최적화를 수행하였다.

이와 같이 다양한 조건 하에서 환형 핀에 대하여 1차원 해석과 2차원 해석들이 적용되어 왔다. 본 논문에서는 내부 유체 열전달계수와 핀 높이가 변화될 수 있는 사각 환형 핀에 대하여 각각 1차원 해석적 방법과 2차원 변수분리법을 사용하

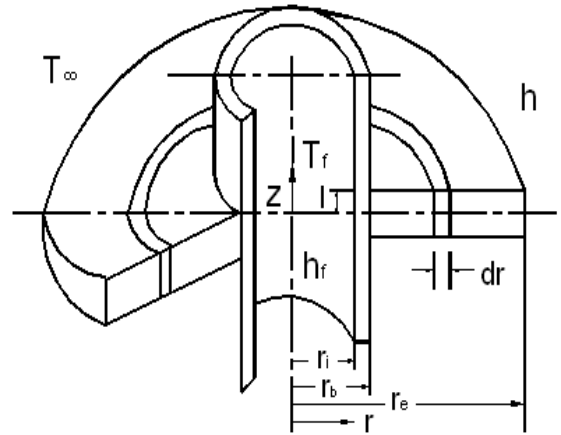


Fig. 1 Geometry of a rectangular annular fin

여 해석한 후 2차원 해석으로 구한 열손실과 1차원 해석과 2차원 해석으로 구한 열손실의 상대오차를 핀 길이, 주위 대류특성계수 그리고 핀 높이의 함수로 제시하였다.

2. 해석적 방법

2.1 1차원 해석

Figure 1에서 보이는 사각 환형 핀에 대한 1차원 지배방정식이 무차원 형태로 식 (1)로 주어진다.

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dR} - \frac{M}{L}\theta = 0 \quad (1)$$

무차원 지배방정식 (1)를 풀기 위하여 식 (2)와 (3) 두개의 무차원 경계 조건이 요구 된다.

$$-\frac{d\theta}{dR}\Big|_{R=R_b} = \frac{1-\theta|_{R=R_b}}{R_b/M_f + R_b \ln R_b} \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dR}\Big|_{R=R_e} + M\theta\Big|_{R=R_e} = 0 \quad (3)$$

여기서 경계 조건식 (2)는 물리적으로 원 관내의 유체로부터 원 관 내경으로의 열대류, 원 관 내경으로부터 핀 바닥반경으로 전도에 의한 열전달 그리고 핀 바닥반경을 통하여 전달되는 열전도는 모두 같다는 것을 의미하며 또 다른 경계조건식 (3)은 핀 끝으로 전도에 의해 들어가는 열전달은 핀 끝에서 대류에 의하여 주위로 나가는 열

전달이 같음을 나타낸다. 무차원 지배 방정식 (1)을 풀 해에 경계 조건식 (2)와 (3)을 적용하면 사각 환형 핀 내의 온도분포 식을 구한 후 그 온도분포 식을 핀 바닥 면을 통한 Fourier의 열전도 식에 적용하면 핀으로부터의 열손실을 나타내는 식 (4)를 얻게 된다.

$$Q = \frac{q}{k\phi_f r_i} = \frac{4\pi m R_b L C_5}{C_1 C_2 + C_3 C_4} \quad (4)$$

여기서,

$$C_1 = m C_6 K_1(m R_b) + K_0(m R_b) \quad (5)$$

$$C_2 = m I_1(m R_e) + M I_0(m R_e) \quad (6)$$

$$C_3 = I_0(m R_b) - m C_6 I_1(m R_b) \quad (7)$$

$$C_4 = m K_1(m R_e) - M K_0(m R_e) \quad (8)$$

$$C_5 = C_2 K_1(m R_b) - m C_4 I_1(m R_b) \quad (9)$$

$$C_6 = R_b / M_f + R_b \ln R_b \quad (10)$$

$$m = \sqrt{\frac{M}{L}} \quad (11)$$

2.2 2차원 해석

Figure 1에서 보이는 사각 환형 핀에 대한 2차원 지배방정식이 무차원 형태로 식 (12)로 주어진다.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = 0 \quad (12)$$

무차원 지배방정식 (12)를 풀기 위하여 네 개의 경계 조건이 요구되는데 경계조건 식 (13)과 (14)는 각각 식 (2)와 (3)과 같은 의미이며 식 (15)는 대칭에 의한 핀 중심 면을 통한 열전달이 없음을 의미한다. 또한 식 (16)은 핀 윗면을 통한 전도 열전달은 그 면을 통해 대류에 의하여 주위로 나가는 열전달과 같음을 의미한다.

$$-\frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=R_b} = \frac{1-\theta|_{R=R_b}}{R_b/M_f + R_b \ln R_b} \quad (13)$$

$$\frac{d\theta}{dR} \Big|_{R=R_e} + M\theta \Big|_{R=R_e} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} \Big|_{Z=L} + M\theta \Big|_{Z=L} = 0 \quad (16)$$

무차원 지배 방정식 (12)를 변수분리법으로 풀 후 경계 조건식 (13)부터 (15)를 적용하여 온도분포 식을 구한 후 1차원 해석에서와 같은 절차를 거쳐 핀으로부터의 열손실을 나타내는 식 (17)을 구할 수 있다.

$$Q = \frac{q}{k\phi_f r_i} = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n B_n}{C_n + D_n E_n} \sin(\lambda_n L) \quad (17)$$

여기서,

$$A_n = \frac{4\sin(\lambda_n L)}{2\lambda_n L + \sin(2\lambda_n L)} \quad (18)$$

$$B_n = I_1(\lambda_n R_b) - f_n K_1(\lambda_n R_b) \quad (19)$$

$$C_n = I_0(\lambda_n R_b) + f_n K_0(\lambda_n R_b) \quad (20)$$

$$D_n = \lambda_n [R_b / M_f + R_b \ln(R_b)] \quad (21)$$

$$E_n = [f_n K_1(\lambda_n R_b) - I_1(\lambda_n R_b)] \quad (22)$$

$$f_n = \frac{\lambda_n I_1(\lambda_n R_e) + M I_0(\lambda_n R_e)}{\lambda_n K_1(\lambda_n R_e) - \lambda_n K_0(\lambda_n R_e)} \quad (23)$$

식 (17)부터 (23)에서 보이는 고유값 λ_n 은 식 (16)을 풀어 정리한 식 (24)로부터 구할 수 있다.

$$\lambda_n \tan(\lambda_n L) = M \quad (24)$$

3. 결과 및 고찰

Figure 2는 두 경우의 내부유체 대류특성계수에 대하여 무차원 핀 끝 길이가 1.11부터 4까지 변화하는 동안 2차원 해석으로 구한 열손실과 상대오차의 변화를 보여준다. 상대오차는 2차원 해석으로 구한 열손실에 대한 1차원 해석으로 구한 열손실에서 2차원 해석으로 구한 열손실을 뺀 값의 비를 의미한다. 핀 길이가 길어짐에 따라 열손실은 처음에 급격히 증가하다 그 이후 서서히 증가하는 반면 상대오차는 핀 끝 길이가 약 1.5정도까지 증가하다 그 이후 감소함을 보여준다. 내부유체 대류특성계수가 클수록 열손실과 상대오차 모두 더 큼을 보여준다. 주어진 핀 길이의 범위에서 상대오차는 0.13% 내의 작은 범위 내에 있음을 보여준다.

두 경우의 핀 길이에 대하여 주위 대류특성계

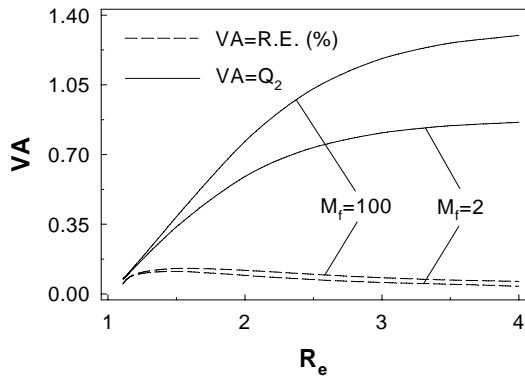


Fig. 2 Heat loss and relative error vs. fin length ($M=0.05$, $L=0.1$, $R_b=1.1$)

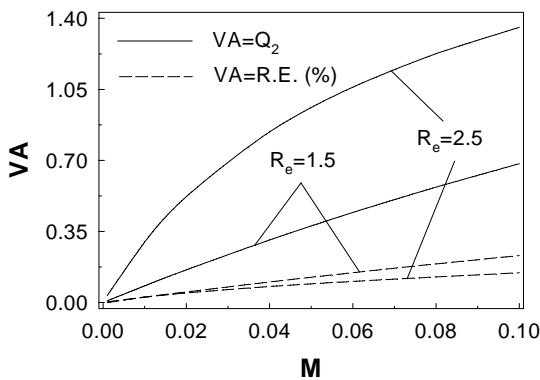


Fig. 3 Heat loss and relative error vs. ambient convection characteristic number ($L=0.15$, $R_b=1.1$, $M_f=10$)

수의 변화에 따른 열손실과 상대오차의 변화가 Fig. 3에서 보여진다. 주위 대류특성계수가 증가함에 따라 핀 끝 길이가 1.5인 경우의 열손실은 선형적으로 증가하는 반면 핀 끝 길이가 2.5인 경우의 열손실은 곡선 적으로 증가한다. 주위 대류특성계수가 0.001부터 0.1까지 증가하는 동안 상대오차는 두 경우의 핀 끝 길이 모두 선형적으로 증가하는데 최대 0.24%내의 범위 내에 있음을 보여준다.

Figure 4는 두 경우의 주위 대류특성계수에 대하여 무차원 핀 높이가 0.01부터 0.3까지 변화하는 동안 그에 따른 열손실과 상대오차의 변화를 보여준다. 열손실은 핀 높이가 높아짐 따라 처음에는 다소 급격히 증가하다 그 이후 지속적으로 증가하는 경향을 알 수 있다. 상대오차는 핀 바닥 높이가 높아짐에 따라 선형적으로 증가하는

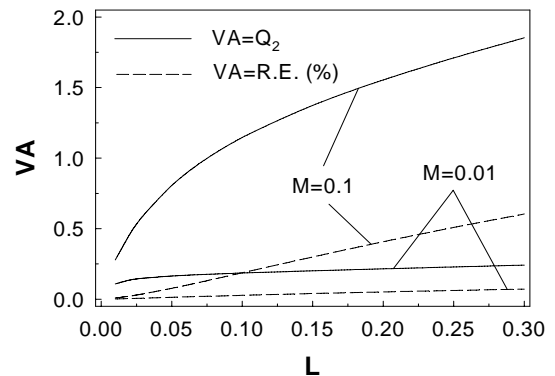


Fig. 4 Heat loss and relative error vs. fin height ($M_f=10$, $R_b=1.1$, $R_e=2$)

데 주위 대류특성계수가 0.1이고 핀 바닥높이가 0.3일 때 최대 약 0.6% 정도의 값을 나타낸다.

4. 결론

내부 유체 열전달계수와 핀 높이가 변화될 수 있는 사각 환형 핀으로부터의 열전달에 대한 1차원해석과 2차원해석의 결과를 비교한 결과 다음과 같은 결론을 얻는다.

- 1) 본 연구에서 주어진 변수들의 범위 내에서 각각 1차원과 2차원으로 구한 열전달의 상대오차는 0.7% 내에 있음을 보여준다.
- 2) 핀 길이의 변화에 따른 열전달의 상대오차는 무차원 핀 끝 길이가 약 1.5까지 증가하다 그 이후 감소하며 이 상대오차에 대한 내부유체 열전달계수 변화의 영향은 미미하다.
- 3) 주위 대류특성계수와 핀 높이의 증가에 따른 열전달의 상대오차는 선형적으로 증가한다.

참고문헌

1. Chung, B. T. F., Abdalla, M. H. and Liu, F., 1989, Optimization of Convective Longitudinal Fin of Trapezoidal Profile, Chem. Eng. Comm., Vol. 80, pp. 211~223.
2. Casarosa, C. and Franco, A., 2001, On the Optimum Thermal Design of Individual Longitudinal Fins with Rectangular Profile, Heat Transfer Engineering, Vol. 22, No. 1, pp. 51~71.
3. Kang, H. S., 2007, Optimum Performance

and Design of a Rectangular Fin, *Int. J. of Automotive Technology*, Vol. 8, No. 6, pp. 705~711.

4. Buccini, A. and Soliman, H. M., 1986, Optimum Dimensions of Annular Fin Assemblies, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 459~462.

5. Ullmann, A. and Kalman, H., 1989, Efficiency and Optimized Dimensions of Annular Fins of Different Cross-Section

Shapes, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, NO. 6, pp. 1105~1110.

6. Kundu, B. and Das, P. K., 2007, Performance Analysis and Optimization of Elliptical Fins Circumscribing a Circular Tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 50, pp. 173~180.

7. Kang, H. S. and Look, D. C. Jr., 2007, Optimization of a Thermally Asymmetric Convective and Radiating Annular Fin, *Heat Transfer Engineering*, Vol. 28, pp. 310~320.