

마코브 연쇄를 이용한 서울지점 일강우의 발생특성 변화 연구

A Study on The Change of Occurrence Characteristics of Daily Seoul Rainfall using Markov Chain

황석환*, 김중훈**, 유철상***, 정성원****, 주진걸*****

Hwang, Seok Hwan, Kim, Joong Hoon, Yoo, Chulsang, Jung, Sung Won, Joo, Jin Gul

요 지

본 논문에서는 세계 최장의 기록을 보유하고 있는 서울지점의 강우량 자료를 이용하여 강우 발생특성의 장기 변동성을 분석하였다. 우선 마코브 연쇄에 근거한 전이확률 및 발생특성을 분석하여 측우기 자료의 정확성을 강우의 발생확률적 측면에서 평가하였다. 전이확률 및 발생특성 분석결과 원자료 계열의 CWK와 MRG는 발생특성이 다르게 나타났다. 강우사상의 특성은 과거에 비해 강우사상의 발생빈도가 높아지고 있으며 각 강우사상의 지속기간은 짧아지고 있는 것으로 나타났다. 이러한 결과를 최근 강우량의 증가양상과 더불어 고려하면 강우사상의 빈도와 심도(강우강도)가 증가하는 추세라고 해석할 수 있다.

핵심용어 : 전이확률, 기후변화, 측우기

1. 서론

근래에 들어 지구온난화 등에 의한 기후변화 여부에 대한 논란이 심화되고 있다. 이는 기후 변화를 초래할 수 있는 요인들이 많아졌고 더불어 잦은 기상이변으로 인해 기후변화에 대한 체감률이 높아졌기 때문이다. 그러나 강우를 포함한 대부분의 기상자료들은 산업혁명 이후인 20세기 이후부터 관측되어 기록되었다. 이러한 현실에서 장기간의 변화추세를 나타내는 강우량의 경년변화 여부를 판단할 근거가 매우 빈약하다. 다만, 근래의 추세로 판단해 볼 때 변화가 있을 것이라는 추정만 가능한 정도이다. 그러나 우리나라의 경우는 조선초기부터 측우기 관측을 시작해 왔고 현재 18세기 말부터의 측우기 관측자료가 존재한다. 다만 일정시간 단위의 관측기록이 아닌 사상중심의 기록으로 인해 일강우량으로 변환시 다소의 불확실성이 포함되게 된다. 일강우량에 기초한 강우모형은 상대적으로 길고 신뢰도 있는 자료를 확보할 수 있다는 면에서 매우 매력적이고 많은 실무 문제에서 만족할 만한 대안으로 사용되어 왔다. 이러한 추계학적 강우발생 모형으로 대표적인 것이 포아송 과정과 마코브 연쇄가 있다. 포아송 과정을 이용한 모형은 Rodriguez-Iturbe 등(1984; 1987, 1988)에 의해 연구되었고, 강우의 발생은 포아송 과정을 따르고 강우강도와 지속기간은 일반적으로 지수분포(혹은 감마분포)를 따른다고 가정한다. 이러한 지수분포의 가정은 모형의 이론적 해석을 쉽게 한다는 장점 때문에 많이 채택되고 있다. 마코브 연쇄를 이용한 모형은 Gabriel과 Neumann(1962)에 의해 처음으로 통계적으로 정형화되었고 이후 Katz(1977), Stern과 Coe(1984), Todorovic과 Woolhiser(1975)에 의해 연구되어 왔다. 마코브 연쇄모형은 강우와 무강우 사이의 전이확률에 근거하여 강우의 발생과정을 결정한다. 마코브 연쇄모형은 실제 과거자료의 전이확률을 사용하고 일단위와 같이 특정시간 단위의 모의가 가능하기 때문에 강우의 모의 발생이 포아송 과정을 이용하는 것에 비해 상대적으로 쉽고 간편하다. 이러한 강우모형을 이용한 다양한 연구들은, 최종 활용목적은 다를지라도, 대부분이 모형이 입력 자료로서의 강우 관측 자료의 부족함을 보완하기 위해 강우 모의 방법에 대한 유도나 성능 검증에 국한되어 있었다. 그러나 본 논문의 목적은 이러한 강우

* 한국건설기술연구원 수자원연구실 연구원

Researcher, Korea Institute of Construction Technology, GyeongGi-Do 411-712, Korea
(e-mail: sukany@kict.re.kr)

** 고려대학교 공과대학 건축·사회환경공학부 교수

Prof., School of Architecture, Civil & Environmental Eng., Korea University, Seoul, 136-713, Korea
(e-mail: jaykim@korea.ac.kr)

*** 고려대학교 공과대학 건축·사회환경공학부 교수

Prof., School of Architecture, Civil & Environmental Eng., Korea University, Seoul, 136-713, Korea
(e-mail: envchul@korea.ac.kr)

**** 한국건설기술연구원 수자원연구실 책임연구원

Chief Researcher, Korea Institute of Construction Technology, GyeongGi-Do 411-712, Korea
(e-mail: swjung@kict.re.kr)

***** 고려대학교 공과대학 건축·사회환경공학부 박사수료

Doctoral Student, School of Architecture, Civil, and Environmental Eng., Korea University, Seoul, 136-713, Korea
(e-mail: civilguy97@hanmail.net)

모형의 성능에 대한 평가나 모의된 강우자료의 정밀도를 평가하는 것이 아니다. 본 논문에서는 세계최장의 기록을 보유하고 있는 우리나라의 서울지점 일강우량 자료의 확률적인 전이 특성을 분석하여 측우기 자료의 정확성을 발생빈도적인 면에서 평가하고, 더 나아가 일강우의 장기적인 발생빈도적 변화특성을 가늠해보고자 한다.

2. 자료계열의 구성

본 연구에서는 1778년에서 2006년까지의 일강우 자료계열을 사용하였다. 1778년에서 1907년까지는 측우기 관측자료이고 1908년에서 2006년까지는 근대우량계 자료이다. M00은 측우기 및 근대 우량계 자료를 그대로 사용한 계열이고 M20은 측우기 최소 관측단위의 영향도 고려해 보고자 근대 우량계 관측기록에서 2mm이하를 제외한 자료계열이다. M00과 M20은 각각 측우기 관측자료계열(1778년-1907년; CWK)과 근대우량계 관측자료계열(1908년-2006년; MRG)로 구분한 G1과 기후변화가 예상되는 1960년 이전(1778년-1960년; BCC)과 1960년 이후자료(1961년-2006년; ACC)로 구분한 G2로 나누었다.

3. 강우의 발생특성 변화

3.1 마코브 연쇄를 이용한 강우발생빈도 모의

강우의 연쇄 과정은 강우의 발생과 그에 해당하는 강우량으로 구성되는 이변량 추계 과정(bivariate stochastic process)이나 본 논문에서는 강우의 발생에 대한 부분만을 다루므로 강우의 발생에 관한 단변량 과정으로 볼 수 있고 Katz의 과정을 중심으로 나타내면 다음과 같다. 먼저 n 번째 일에 발생하는 강우 또는 무강우 사상을 나타내는 변량 η_n 을 정의하면 다음과 같다.

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{if } n^{\text{th}} \text{ day is wet} \\ 0, & \text{if } n^{\text{th}} \text{ day is dry} \end{cases} \quad (1)$$

여기서, $\{\eta_n : n = 0, 1, \dots\}$ 이 1차 양상태(two-state) 마코브 연쇄로 구성된다고 가정하면, η_n 과정은 다음 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} \Pr[\eta_n = j | \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}, \eta_{n-1} = i] \\ = \Pr[\eta_n = j | \eta_{n-1} = i] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $i, j = 0, 1, n = 1, 2, \dots$ 이다. 만약 $\eta_n = 0$ 이면 n 번째 일($n^{\text{th}} \text{ day}$)은 무강우(dry)이고 $\eta_n = 1$ 이면 n 번째 일($n^{\text{th}} \text{ day}$)은 강우(wet)에 해당한다.

이 때 전이확률을

$$p_{ij} = \Pr[\eta_n = j | \eta_{n-1} = i], \quad i, j = 0, 1 \quad (3)$$

으로, 초기확률 ξ_i 를

$$\xi_i = \Pr[\eta_0 = i], \quad i = 0, 1 \quad (4)$$

으로 정의할 때, 다음과 같이 정의되는

$$\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[\eta_n = i] \quad (5)$$

수렴 확률(stationary probability) π_i 는 다음과 같다.

$$\pi_0 = \frac{p_{10}}{p_{01} + p_{10}}, \quad \pi_1 = \frac{p_{01}}{p_{01} + p_{10}} \quad (6)$$

결국, 마코브 연쇄는 모수 ξ_1, p_{01} 과 p_{10} 으로 완벽히 표현될 수 있다.

4. 분석 결과

4.1 관측자료에 나타난 일강우의 월별 발생특성

표1 및 표2와 같이 각 자료계열별로 강우일과 무강우일에 대한 전이확률($p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$)과 지속기간의 개수(Number of w/d spells) 및 지속기간의 평균길이(Mean length of w/d spells)를 산정하여 보았다. 전이확률($p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$)은 각각, 전날이 무강우일 때 다음날이 무강우일 확률(p_{00}), 전날이 무강우일 때 다음날이 강우일 확률(p_{01}), 전날이 강우일 때 다음날이 무강우일 확률(p_{10}), 그리고 전날이 강우일 때 다음날이 강우일 확률(p_{11})에 대한 월별 평균 전이확률을 의미한다. 4월에서 10월까지 분석하였으나, 본 논문은 여름철 강우특성에 초점을 두고 있으므로 주로 6월에서 9월 사이의 강우특성에 대해 중점을 두고 분석하였다. 본 분석의 목적은 우선 원자료계열(M00)에 대한 CWK와 MRG간의 발생특성에 따른 차이를 파악하고, 유사조건(M20)하에서 CWK와 MRG간의 발생특성을 분석하여 일강우의 월별 발생특성의 장기변동성을 파악하는데 있다. 여기서 유사조건이라 함은 측우기 최소관측단위가 약 2mm임을 고려하여 근대우량계 계열에서도 2mm 이하를 무강우로 간주한 경우이다. 강우의 정량적 비교와는

달리 강우의 발생특성을 분석하는 경우에 유사조건은 매우 중요하다. CWK나 BCC의 경우 1908년 이전자료는 측우기 자료로 비록 양적으로는 근대 우량계 자료와 큰 차이를 보이지 않을지라도, 강우의 유무에 의해서만 결정되는 전이확률이나 지속기간 등의 발생특성은 비교적 명확한 차이를 보일 수 있기 때문이다.

CWK 자료계열의 정도를 파악하기 위한 M00과 M20에 대한 CWK와 MRG 일강우의 월별 발생특성 분석결과는 표1, 표2와 같다. 이를 통해 앞서 M00의 분석결과에서 나타난 "CWK의 경우 강우량이 상대적으로 적은 소규모 사상들은 기록에서 누락되었을 가능성"을 재확인해 보고자 하였다. 분석결과 CWK의 경우 강우량이 상대적으로 적은 소규모 사상들은 기록에서 누락되었을 가능성이 매우 높음을 재확인 할 수 있었다.

유사조건자료계열(M20)을 기준으로 우선, CWK와 MRG간의 강우발생특성의 변화양상을 분석하였고 다음으로, 기후변화가 예상되는 시점을 전후로 구분한 BCC와 ACC간의 강우발생특성의 변화양상을 분석하였다. 결론적으로, M20을 기준으로 볼 때, 과거에서 현재로 오면서 강우지속기간의 수와 무강우 지속기간의 수는 증가하는 경향을 나타냈고, 강우지속기간과 무강우지속기간의 평균길이는 짧아지는 경향을 나타내었다. 특히, 무강우지속기간의 평균길이 감소폭이 매우 큰 것으로 나타났다. 이를 최근 강우량의 증가양상과 더불어 결론지으면, 최근 강우사상의 특성은 과거에 비해 강우사상의 발생빈도가 높아지고 있으며 각 강우사상의 지속기간은 짧아지고 있다. 즉, 강우사상의 빈도와 심도(강우강도)가 증가하는 추세가 있다고 보인다. 단, 본 연구에서 도출된 결과 자체는 발생특성의 정량적 비교에 의한 분석결과이므로 상당한 신뢰도를 가지고 있지만, 그 정량적 차이가 크지 않고 2mm 이하의 강우를 제외한 상태에서 제한적으로 비교한 결과라는 점을 감안할 필요가 있다. 더불어 이러한 결과는 강우의 발생여부에 대한 변화특성으로 강우의 양적인 변화특성은 별도로 고려하여야 한다.

Table 1. Dry-wet spells of observed daily rainfall (M00)

Data sets	Month	Probabilities of dry-wet spells									
		p00	p01	p10	p11	nwsp	mlwsp	nxwsp	ndsp	mldsp	nxdsp
CWK	APR	0.8722	0.1278	0.6390	0.3610	3	1.67	0	4	7.67	1
	MAY	0.8577	0.1423	0.6429	0.3571	4	1.63	0	4	7.32	1
	JUN	0.8294	0.1706	0.5678	0.4322	4	1.84	0	4	6.55	1
	JUL	0.7138	0.2862	0.4223	0.5777	5	2.58	1	5	4.18	0
	AUG	0.7457	0.2543	0.5000	0.5000	5	2.15	0	5	4.49	0
	SEP	0.8527	0.1473	0.6239	0.3761	3	1.78	0	4	7.18	1
	OCT	0.8958	0.1042	0.7182	0.2818	3	1.50	0	3	9.72	1
MRG	APR	0.7772	0.2228	0.5900	0.4100	5	1.75	0	5	4.69	0
	MAY	0.7623	0.2377	0.5894	0.4106	5	1.79	0	6	4.25	0
	JUN	0.7230	0.2770	0.5225	0.4775	5	1.98	0	6	3.80	0
	JUL	0.6280	0.3720	0.3311	0.6689	5	3.31	1	5	2.82	0
	AUG	0.6863	0.3137	0.4085	0.5915	5	2.61	1	6	3.48	0
	SEP	0.7603	0.2397	0.5554	0.4446	5	1.95	0	5	4.36	0
	OCT	0.8227	0.1773	0.6606	0.3394	4	1.60	0	5	6.37	1
BCC	APR	0.8478	0.1522	0.6256	0.3744	4	1.70	0	4	6.87	1
	MAY	0.8289	0.1711	0.6213	0.3787	4	1.69	0	5	6.42	1
	JUN	0.8011	0.1989	0.5469	0.4531	4	1.90	0	5	5.81	1
	JUL	0.6908	0.3092	0.3957	0.6043	5	2.79	1	5	3.81	0
	AUG	0.7363	0.2637	0.4774	0.5226	5	2.27	0	5	4.27	0
	SEP	0.8268	0.1732	0.5963	0.4037	4	1.84	0	4	6.41	1
	OCT	0.8735	0.1265	0.7035	0.2965	3	1.53	0	4	8.66	1
ACC	APR	0.7711	0.2289	0.5902	0.4098	5	1.74	0	5	4.63	0
	MAY	0.7727	0.2273	0.6155	0.3845	5	1.72	0	5	4.51	0
	JUN	0.7198	0.2802	0.5546	0.4454	6	1.88	0	6	3.74	0
	JUL	0.6262	0.3738	0.3376	0.6624	5	3.28	1	6	2.82	0
	AUG	0.6597	0.3403	0.3986	0.6014	6	2.62	1	6	3.24	0
	SEP	0.7628	0.2372	0.5880	0.4120	5	1.90	0	5	4.37	0
	OCT	0.8318	0.1682	0.6543	0.3457	4	1.61	0	5	6.92	1

p00 : matrix of persistence from dry to dry state

p01 : matrix of persistence from dry to wet state

p10 : matrix of persistence from wet to dry state

p11 : matrix of persistence from wet to wet state

nwsp : number of wet spells

mlwsp : mean length of wet spells

nxwsp : number of wet spells exceeding or equal to threshold : 5days

ndsp : number of dry spells

mldsp : mean length of dry spells

nxdsp : number of dry spells exceeding or equal to threshold : 10day

Table 2. Dry-wet spells of observed daily rainfall (M20)

Data sets	Month	Probabilities of dry-wet spells									
		p00	p01	p10	p11	nwsp	mlwsp	nxwsp	ndsp	mldsp	nxdsp
CWK	APR	0.8722	0.1278	0.6390	0.3610	3	1.67	0	4	7.67	1
	MAY	0.8577	0.1423	0.6429	0.3571	4	1.63	0	4	7.32	1
	JUN	0.8294	0.1706	0.5678	0.4322	4	1.84	0	4	6.55	1
	JUL	0.7138	0.2862	0.4223	0.5777	5	2.58	1	5	4.18	0
	AUG	0.7457	0.2543	0.5000	0.5000	5	2.15	0	5	4.49	0
	SEP	0.8527	0.1473	0.6239	0.3761	3	1.78	0	4	7.18	1
	OCT	0.8958	0.1042	0.7182	0.2818	3	1.50	0	3	9.72	1
MRG	APR	0.8495	0.1505	0.7309	0.2691	4	1.47	0	4	6.73	1
	MAY	0.8431	0.1569	0.7188	0.2812	4	1.48	0	5	6.29	1
	JUN	0.8141	0.1859	0.6385	0.3615	4	1.66	0	5	5.88	1
	JUL	0.6938	0.3062	0.4855	0.5145	6	2.23	0	6	3.42	0
	AUG	0.7583	0.2417	0.5335	0.4665	5	2.02	0	5	4.46	0
	SEP	0.8219	0.1781	0.6980	0.3020	4	1.55	0	5	5.76	1
	OCT	0.8866	0.1134	0.7807	0.2193	3	1.34	0	4	8.81	1
BCC	APR	0.8664	0.1336	0.6614	0.3386	3	1.61	0	4	7.42	1
	MAY	0.8534	0.1466	0.6605	0.3395	4	1.60	0	4	7.06	1
	JUN	0.8258	0.1742	0.5780	0.4220	4	1.82	0	4	6.39	1
	JUL	0.7074	0.2926	0.4330	0.5670	5	2.52	1	5	4.00	0
	AUG	0.7569	0.2431	0.5122	0.4878	5	2.10	0	5	4.60	0
	SEP	0.8446	0.1554	0.6334	0.3666	4	1.74	0	4	6.82	1
	OCT	0.8939	0.1061	0.7334	0.2666	3	1.46	0	3	9.54	1
ACC	APR	0.8478	0.1522	0.7420	0.2580	4	1.46	0	4	6.71	1
	MAY	0.8443	0.1557	0.7310	0.2690	4	1.46	0	5	6.22	1
	JUN	0.8118	0.1882	0.6747	0.3253	4	1.56	0	5	5.80	1
	JUL	0.6974	0.3026	0.5111	0.4889	6	2.07	0	6	3.31	0
	AUG	0.7282	0.2718	0.5219	0.4781	5	2.06	0	6	4.00	0
	SEP	0.8204	0.1796	0.7405	0.2595	4	1.45	0	5	5.64	1
	OCT	0.8844	0.1156	0.7892	0.2108	3	1.34	0	4	8.54	1

p00 : matrix of persistence from dry to dry state
 p01 : matrix of persistence from dry to wet state
 p10 : matrix of persistence from wet to dry state
 p11 : matrix of persistence from wet to wet state
 nwsp : number of wet spells
 mlwsp : mean length of wet spells
 nxwsp : number of wet spells exceeding or equal to threshold : 5days
 ndsp : number of dry spells
 mldsp : mean length of dry spells
 nxdsp : number of dry spells exceeding or equal to threshold : 10day

5. 결론

본 논문에서는 세계 최장의 기록을 보유하고 있는 서울지점 일강우량 자료의 확률적인 전이특성을 분석하여 측우기 자료의 정확성을 발생빈도적인 측면에서 평가하고, 일강우량의 장기 월간 발생빈도적 특성 변화를 분석해 보았다. 그 결과를 정리하면, 관측자료에 나타난 일강우의 월별 발생특성 분석결과, MOO의 CWK와 MRG는 발생특성에 차이를 보였고, CWK의 경우 강우량이 상대적으로 적은 소규모 사상들은 기록에서 누락되었을 가능성이 매우 높음을 확인 할 수 있었다. M20을 기준으로 볼 때, 과거에서 현재로 오면서 강우지속기간의 수와 무강우지속기간의 수는 약간 증가하는 경향을 나타냈다. 강우지속기간과 무강우지속기간의 평균길이는 약간 짧아지는 경향을 나타내었고, 특히 무강우지속기간의 평균길이 감소폭이 매우 큰 것으로 나타났다. 결론적으로, 최근 강우사상의 특성은 과거에 비해 강우사상의 발생빈도가 높아지고 있으며 각 강우사상의 지속기간은 짧아지고 있다. 이를 최근 강우량의 증가양상과 더불어 고려하면 강우사상의 빈도와 심도(강우강도)가 증가하는 추세라는 의미로 해석할 수 있다.

6. 참고문헌

김기욱, 유철상, 박민규, 김현준 (2007). "강우빈도해석에서의 측우기자료의 유용성 평가." **한국수자원학회논문집**, 제40권, 제11호, pp. 851-859.
 유철상, 김보운, 노재경 (2000). "서울지점 연강수량 자료에 나타난 다우해 및 과우해의 재현 특성에 관한 연구." **한국수자원학회논문집**, 제33권, 제3호, pp. 307-314.
 유철상 (2000). "서울지점 연강수량 자료에 나타난 장기 건조기의 재현 가능성에 관한 고찰." **한국수자원학회논문집**, 제33권, 제5호, pp. 519-526.
 유철상, 류소라 (2003). "서울지점 가뭄의 재현 및 지속특성 분석." **한국수자원학회논문집**, 제36권, 제4호, pp. 561-573.
 유철상, 이동률 (2000). "일강우자료의 다지점 모의 발생을 위한 간단한 방법 제안." **한국수자원학회논문집**, 제33권, 제1호, pp. 99-110.
 이병철 (1970). "서울의 연강수량 및 하기강수량의 Normality에 관한 연구." **한국기상학회지**, 제5권, pp. 11-14

- 전종갑, 문병권 (1997). "서울 지역 강수량과 강수일의 관계, 1770-1907." **한국기상학회지**, 제30권, 제4호, pp. 487-505.
- 전종갑, 문병권 (1997). "측우기 강수량 자료의 복원과 분석." **한국기상학회지**, 제33권, 제4호, pp. 691-707.
- 정현숙 (1999). "서울 지역 강수량 시계열에 나타난 시간 변동성 해석." 박사학위논문, 서울대학교, pp. 9-118.
- 정현숙, 임규호, 오재호 (1999). "서울 지역 강수량의 시계열에 나타난 시간 변동성 해석." **한국기상학회지**, 제35권, 제3호, pp. 354-371.
- Buishand, T.A., (1977). Stochastic modelling of daily rainfall sequences, Wageningen, Veenman and Zonen, pp. 211.
- Entekhabi, D., Rodriguez-Iturbe, I., and Eagleson, P.S. (1989). "Probabilistic Representation of the Temporal Rainfall by a modified Neyman-Scott Rectangular Pulse Model: Parameter Estimation and Validation." *Water Resources Research*, Vol. 25, No. 2, pp. 295-302.
- Gabriel, K.R., and Neumann, J. (1962). "A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel Aviv." *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 88, pp. 90-95.
- Heermann, D.F., Finkner, M.D., and Hiler, E.A. (1968). "Probability of sequences of wet and dry days for eleven Western states and Texas." *Colorado A.E.S. Tech. Bull.*, No. 117.
- Islam, S., Entekhabi, D., and Bras, R.L. (1990). "Parameter Estimation and Sensitivity Analysis for the Modified Bartlett-Lewis Rectangular Pulses Model of Rainfall." *Journal of Geophysical Research*, Vol. 95, No. D3, pp. 2093-2100.
- Katz, R.W. (1977). "Precipitation as a chain-dependent process." *Journal of Applied Meteorology*, Vol. 16, pp. 671-676.
- Kim, J.W., and Ha, K J. (1987). "Climate changes and international fluctuations in the monthly amounts of precipitation at Seoul." *Journal of the Korean Meteorological Society*, Vol 23, pp. 54-69.
- Lim, G.H., and Jung, H.S. (1992). "Interannual variation of the annual precipitations at Seoul, 1771-1990." *Journal of the Korean Meteorological Society*, Vol. 28, pp. 125-132.
- Richardson, C.W. (1979). "Simulation of daily weather variables." *Presented at Joint meeting of ASCE and CSAE*, June 1979.
- Rodriguez-Iturbe, I., Gupta, V.K., and Waymire, E. (1984). "Scale Consideration in the Modeling of Temporal Rainfall." *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 11, pp. 1611-1619.
- Rodriguez-Iturbe, I., Cox, D.R., and Isham, V. (1987). "Some Models for Rainfall Based on Stochastic Point Process." *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. A410, No. 1839, pp. 269-288.
- Rodriguez-Iturbe, I., Cox, D.R., and Isham, V. (1988). "A Point Process Model for Rainfall: Further Developments." *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. A417, No. 1853, pp. 283-298.
- Stern, R.D., and Coe, R. (1984). "A model fitting analysis of daily rainfall data." *Journal of the Royal Society of Statistical Analysis*, Vol. 147, pp. 1-34.
- Todorovic, P., and Woolhiser, D.A. (1975). "A stochastic model of n-day precipitation." *Journal of Applied Meteorology*, Vol. 14, pp. 17-24.
- Wilks, D.S. (1989). "Conditioning stochastic daily precipitation models on total monthly precipitation." *Water Resources Research*, Vol. 25, pp. 1429-1439.
- Wilks, D.S. (1999). "International variability and extreme-value characteristics of several stochastic daily precipitation models." *Agricultural and Forest Meteorology*, Vol. 93, pp. 153-169.