축방향으로 이동하는 현에 대한 스펙트럴 요소 모델링
Spectral Element Modeling for the Axially Moving Strings

최정식* 이우식†
Choi, Jungsik Lee, Usik

ABSTRACT

The spectral element modeling is known to provide very accurate structural dynamic characteristics, while reducing the number of degree-of-freedom to resolve the computational and cost problems. Thus, the spectral element model with variational method for an axially moving string subjected to axial tension is developed in the present paper. The high accuracy of the spectral element model is the verified by comparing its solutions with the conventional finite element solutions and exact analytical solutions. The effects of the moving speed and axial tension the vibration characteristics, wave characteristics, and the static and dynamic stabilities of a moving string are investigated.

국문요약

스펙트럴요소법(SEM)은 계산되는 행렬의 크기를 줄여 비용과 시간을 절감하면서 구조물의 동역학적 특성을 정확하게 알 수 있는 해석법이다. 본 연구에서는 변분법을 이용하여 양단에서 축 방향으로 장력을 받으며 같은 방향으로 이동하는 현을 스펙트럴요소법(SEM)을 이용하여 해석하였다. 또 결과의 정확도를 비교하기 위하여 스펙트럴요소법(SEM)과 유한요소법(FEM)과 엄밀해를 비교하였다. 그리고 현이 움직이는 속도와 양단에 작용하는 장력이 진동특성, 파동특성 그리고 정, 동적 안정성에 어떤 영향을 미치는지 연구하였다

1. 서 론

축방향으로 움직이는 현은 산업 현장 혹은 실생활 등 여러 방면에서 사용된다. 특히 축방향으로 힘을 받으며 움직이는 경우가 많은데, 이 경우의 동적 특성을 해석하고 현이 이동하는 속도에 따라서 동적특성이 어떻게 변화하는지 관찰하였다. 본 연구에서는 현이 거리가 L인 두 단순 지지 사이를 이동하며, mass transport가 x=0, L일 때, 지속적으로 일어난다고 가정하였다. 경계에서의 system에서의 mass 변화가 있을 경우에 McIver[1]에 의해 확장된Hamilton's principle를 사용하여 운동방정식을 유도하였다.

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T - \delta V + \delta W_{NC} - \delta W_{MT})\, dt = 0 \tag{1}$$

여기서 T는 kinetic energy, V는 potential energy, δWNC는 non-conservative external forces에 의한 virtual work, δWMT는 경계 x=0, L에서의 질량유동으로 인한 virtual momentum transport 이다.

* 비회원, 인하대학교 기계공학과
† 책임저자 : 정회원, 인하대학교 기계공학과 교수
E-mail : ulee@inha.ac.kr
TEL : (032)860-8780 FAX : (032)866-1434

2. 본 론

2.1 운동 방정식

Kinetic energy와 potential energy는 다음과 같이 주어진다.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A\,[c^2 + (\dot{w} + cw')^2]\,dx$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L N_x w'^2\,dx \tag{2}$$

w(x, t)는 transverse displacement이다. dot( )과 prime( )은 각각 시간과 공간 좌표 x에 대한 미분이다. Virtual work δWNC은 다음과 같이 주어진다.

$$\delta W_{NC} = \int_0^L f(x,t)\delta w dx + Q_1\delta w(0,t) + Q_2\delta w(L,t) \tag{3}$$

f (x, t)는 분산력을 나타내고 Q1(t), Q2(t)는 x=0,L에서의 transverse force를 나타낸다. virtual momentum transport δWMT는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta W_{MT} = \rho Ac(\dot{w} + cw')\delta w\Big|_0^L \tag{4}$$

여기서 c는 현이 이동하는 속도를 나타낸다. (2)-(4)를 (1)에 대입하면 운동 방정식을 구할수 있다.

$$\rho A\ddot{w} + 2\rho Ac\dot{w}' + \rho Ac^2 w'' - N_x w'' = f(x,t) \tag{5}$$

경계 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$Q(0,t) = -Q_1(t) \quad \text{or} \quad w(0,t) = w_1(t)$$
$$Q(L,t) = Q_2(t) \quad \text{or} \quad w(L,t) = w_2(t)$$

2.2 Spectral Element Modeling

(5)의 해를 spectral form으로 가정하면,

$$w(x,t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W_n(x)e^{i\omega_n t} \tag{6}$$

이다. f (x, t), Q (x, t), Q1(t), Q2(t), w1(t) and w2(t)를 spectral form으로 쓰면,

$$\{f(x,t),\ Q(x,t)\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{F_n(x),\ Q_n(x)\}e^{i\omega_n t}$$

$$\{Q_1(t),\ Q_2(t)\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{Q_{1n}(t),\ Q_{2n}(t)\}e^{i\omega_n t}$$

$$\{w_1(t),\ w_2(t)\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{W_{1n},\ W_{2n}\}e^{i\omega_n t} \tag{7}$$

(6),(7)을(4)에 대입하면 frequency-domain의 운동방정식을 구할 수 있다.

$$-\omega^2\rho AW + 2i\omega\rho AcW' - (N_x - \rho Ac^2)W'' = F(x) \tag{8}$$

경계조건은

$$Q(0) = -Q_1 \quad \text{or} \quad W(0) = W_1$$
$$Q(L) = +Q_2 \quad \text{or} \quad W(L) = W_2$$

이다. frequency-domain의 힘-변위 관계는

$$Q(x) = N_x W' \tag{9}$$

이다. Spectral nodal DOFs, forces는 각각

$$\boldsymbol{d} = \{W_1 \quad W_2\}^{\mathrm{T}} = \{W(0) \quad W(L)\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{f}_c = \{Q_1 \quad Q_2\}^{\mathrm{T}} = \{-Q(0) \quad +Q(L)\}^{\mathrm{T}}$$

으로 주어진다.

이를 바탕으로 (8)을 다시 쓰면,

$$\delta\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\{\int_0^L [(N_x - \rho A c^2)\boldsymbol{N}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}' - \omega^2 \rho A \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} + i\omega\rho A c(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}' - \boldsymbol{N}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N})]dx$$
$$+ (i\omega\rho A c\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} + \rho A c^2 \boldsymbol{N}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N})\Big|_0^L\}\boldsymbol{d} = \delta\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{f}_c + \boldsymbol{f}_d\} \tag{9}$$

여기서,

$$\mathbf{N}(x;\omega) = \frac{1}{e^{-ik_2L} - e^{-ik_1L}}\,[e^{-i(k_2L+k_1x)} - e^{-i(k_1L+k_2x)} \qquad -e^{-ik_1x} + e^{-ik_2x}])$$

이다. (9)를 정리하면

$$\boldsymbol{S}_S(\omega)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}(\omega) \tag{10}$$

여기서,

$$\boldsymbol{S}_S(\omega) = \begin{bmatrix} S_{S11} & S_{S12} \\ S_{S21} & S_{S22} \end{bmatrix}$$

$$S_{S11} = -(N_x - \rho A c^2)\alpha_{11} - \rho A\omega^2\beta_{11} - \omega\rho A c\varepsilon_{11} + i\omega\rho A c\lambda_{11} - i\rho A c^2\eta_{11}$$
$$S_{S12} = -(N_x - \rho A c^2)\alpha_{12} - \rho A\omega^2\beta_{12} - \omega\rho A c\varepsilon_{12} + i\omega\rho A c\lambda_{12} - i\rho A c^2\eta_{12}$$
$$S_{S21} = -(N_x - \rho A c^2)\alpha_{21} - \rho A\omega^2\beta_{21} - \omega\rho A c\varepsilon_{21} + i\omega\rho A c\lambda_{21} - i\rho A c^2\eta_{21}$$
$$S_{S22} = -(N_x - \rho A c^2)\varepsilon_{22} - \rho A\omega^2\beta_{22} - \omega\rho A c\varepsilon_{22} + i\omega\rho A c\lambda_{22} - i\rho A c^2\eta_{22}$$

$$\beta_{11} = i\,\frac{e_1^2(k_1+k_2)[k_2e_2^2 + k_1(e_2^2-1)] - k_2[4k_1(e_{12}-1) + e_2^2(k_1+k_2)]}{2k_1k_2(k_1+k_2)(e_1-e_2)^2}$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -i\,\frac{k_1^2e_1(e_2^2-1) + k_1k_2(e_1+e_2)(1-e_{12}) + k_2^2e_2(e_1^2-1)}{2k_1k_2(k_1+k_2)(e_1-e_2)^2}$$

$$\beta_{22} = i\,\frac{k_1^2(e_2^2-1) + k_1k_2(e_1^2+e_2^2-4e_{12}+2) + k_2^2(e_1^2-1)}{2k_1k_2(k_1+k_2)(e_1-e_2)^2}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$$

$$\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12} = i\,\frac{(k_1-k_2)(e_{12}-1)}{(k_1+k_2)(e_1-e_2)} \qquad \begin{aligned}\lambda_{11} &= -\lambda_{22} = -1 \\ \lambda_{12} &= \lambda_{21} = 0\end{aligned}$$

이다.

2.3 수치 예제

Two fixed supports를 경계로 이동하는 현의 경계조건은 다음과 같다.

$$w(0,t) = w(L,t) = 0$$

f(x, t) = 0이면 (5)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$w(x,t) = C_1\cos\omega(t+\alpha_1x) + C_2\cos\omega(t+\alpha_2x) \tag{11}$$

여기서

$$\alpha_1 = \frac{\rho Ac + \sqrt{\rho AN_x}}{N_x - \rho Ac^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho Ac - \sqrt{\rho AN_x}}{N_x - \rho Ac^2}$$

이고, C1, C2는 적분상수이다. Fixed boundary condition을 적용하면,

$$\cos\omega(t + \alpha_1 L) = \cos\omega(t + \alpha_2 L)$$

이다. 이제 natural frequency를 구하면,

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{(\alpha_1 - \alpha_2)L} = \frac{n(N_x - \rho Ac^2)}{2L\sqrt{\rho AN_x}} \tag{12}$$

이다. 위험속도는

$$c_{cr} = \sqrt{\frac{N_x}{\rho A}}$$

이다. 표 1은 현의 이동 속도에 따른 natural frequency의 변화를 보여주고 있다. 사용된 물리량은 L = 2 m, ρA = 1 kg/m and Nx = 10 kN이다.

3. 결 론

움직이는 현의 이동속도는 현의 natural frequency에 영향을 미치는 것으로 계산되었다. SEM은 FEM에 비해 적은 요소 개수로 정확한 해를 나타내고 있다. FEM의 연산결과는 요소의 개수를 늘릴수록 theory결과와 SEM결과에 수렴하는 것을 볼 수 있다. SEM은 기본적으로frqeuncy-domain에서 해를 근사하는 dynamic shape function을 사용하므로frequency-domain에서 정확한 해를 제시해준다.

참고문헌

1. McIver, D. B. (1972) Hamilton's Principle for Systems of Changing Mass, Journal of Engineering Mathematics, 7, pp. 249-261
2. Oh, H., Lee, U. and Park, D. H. (2004) Dynamics of an Axially Moving Bernoulli-Euler Beam: Spectral Element Modeling and Analysis, KSME International Journal, 18(3), pp. 382-393.
3. Pellicano, F. and Vestroni, F. (2001) Non-linear Dynamics and Bifurcations of an Axially Moving Beam, Journal of Vibration and Acoustics, 22, pp. 21-30.
4. Le-Ngoc, L. and McCallion, H. (1999) Dynamic Stiffness of an Axially Moving String, Journal of Sound and Vibration, 220(4), pp. 749-756.
5. Lee, U. and Jang, I. (2007) On the Boundary Conditions for Axially Moving Beams, Journal of Sound and Vibration, 306(3-5), pp. 675-690.

표1. 속도에 따른 natural frequency

Moving speed (m/s)	Method	Natural frequency (Hz)				
		f1	f2	f3	f4	f5
0	Theory	25	50	75	100	125
	SEM(2)	25	50	75	100	125
	FEM(2)	27.566	-	-	-	-
	FEM(10)	25.103	50.826	77.797	106.63	137.83
	FEM(50)	25.004	50.033	75.111	100.26	125.51
	FEM(100)	25.001	50.008	75.028	100.07	125.13
20	Theory	24	48	72	96	120
	SEM(2)	24	48	72	96	120
	FEM(2)	27.566	-	-	-	-
	FEM(10)	24.639	50.024	76.902	105.98	137.83
	FEM(50)	24.519	49.069	73.678	98.376	123.19
	FEM(100)	24.516	49.039	73.577	98.138	122.73
50	Theory	18.75	37.5	56.25	75	93.75
	SEM(2)	18.75	37.5	56.25	75	93.75
	FEM(2)	27.566	-	-	-	-
	FEM(10)	22.567	46.384	72.738	102.89	137.83
	FEM(50)	22.369	44.787	67.305	89.971	112.84
	FEM(100)	22.363	44.738	67.138	89.575	112.06