

내접구를 이용한 3차원 불연속 변형해석의 접촉문제 연구

안태영, 송재준(서울대학교)

초록 : 불연속변형해석(DDA)은 유한요소법(FEM)과 개별요소법(DEM)의 장점을 모두 가지고 있는 해석법이다. 3차원 불연속변형해석의 안정성과 해석속도는 접촉찾기(Contact Detection) 알고리즘과 벌칙스프링(Penalty spring)을 이용한 접촉처리 알고리즘에 의해 크게 좌우되는데, 블록의 꼭지점(vertex) 간의 접촉이 발생할 경우, 적합한 접촉면을 결정하는 과정에서 많은 해석오류와 시간적 손실이 발생할 가능성이 있다. 본 연구에서는 블록의 꼭지점에 내접하는 구(inscribed sphere)를 삽입하여 가상의 접촉점과 접촉면을 생성하는 알고리즘을 연구하였다. 이로 인해 발생할 수 있는 해석의 오차의 크기를 확인하고, 간단한 불연속 변형해석의 해석 실례에 적용해 보았다.

1. 서론

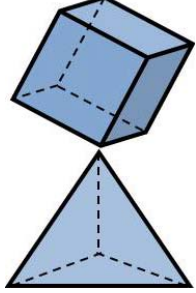
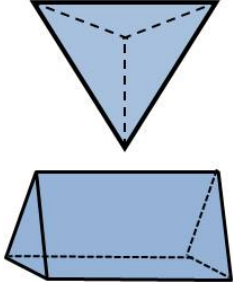
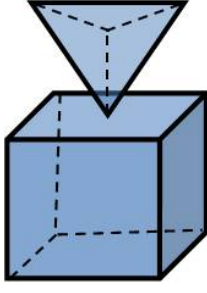
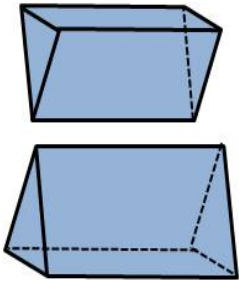
3차원 불연속 변형해석 기법은 최근 국제적으로 연구가 활발히 진행되고 있으나, 복잡한 형태의 블록들 간에 발생하는 다양한 3차원 접촉 형태를 고려하기가 매우 까다롭다. 모든 해석이 구(particle)와 면(wall)에 의해 진행되는 PFC3D 해석방법과는 달리, 다면체(polyhedron) 형태의 개별 블록을 그대로 생성하여 해석하는 불연속변형해석의 경우, 접촉 모서리와 접촉면의 형태에 따라 접촉찾기 및 접촉처리 과정이 매우 다양하고 많은 예외처리 과정을 포함해야 하기 때문이다.

3차원 불연속변형해석의 접촉문제를 개선하는 노력은 다양한 연구를 통해 이루어지고 있는데, Keneti 등(2008)은 볼록한(convex) 블록에 대한 접촉의 형태를 블록간의 위치관계에 따라 정의하는 방법을 제안하였고, Beyabanaki(2007)는 공통면(common plane)을 적용하여 접촉찾기 과정의 효율을 높이는 방법을 제안하기도 하였다. Yeung(2007), Wu(2008)등은 모서리끼리 접촉하는 블록에 대한 구체적인 접촉알고리즘을 연구하였다. 이와 같이 3차원 불연속 변형해석의 접촉문제에 관한 연구가 진행되고 있으나 아직 상용화된 프로그램이 나오지 못하고 있는 만큼, 여전히 접촉문제에 관한 보다 효과적인 알고리즘이 개발될 필요가 있는 실정이다.

2. 3차원 불연속 변형해석의 접촉문제

3차원 공간상에서 블록과 블록간의 접촉은, 면(face)과 면, 면과 모서리(edge), 면과 꼭지점(vertex), 모서리와 모서리, 모서리와 꼭지점, 꼭지점과 꼭지점의 총 6가지 형태로 정의할 수 있는데, 이중 면과 면의 접촉과 면과 모서리의 접촉은 다른 4가지 접촉의 합인 형태로 구성되어 있다고 보고, 아래와 같이 4가지의 형태로 정의할 수 있다.

표 2.1 단순화된 3차원 블록의 4가지 접촉형태

점-점 접촉 (vertex-to-vertex)	점-모서리 접촉 (vertex-to-edge)	점-면 접촉 (vertex-to-face)	모서리-모서리 접촉 (edge-to-edge)
			

※ 모서리-면 접촉과 면-면 접촉은 상기한 4 형태 중 일부의 합으로 정의할 수 있다.

표 2.1의 4가지 접촉은 최종적으로는 하나의 점이 하나의 면을 접촉하는 것으로 해석된다. 즉, 각각의 접촉형태를 정의한뒤, 정의된 접촉형태에 따라 가장 적합한 접촉면을 선택하는 과정을 거쳐, 관통하는 점(penetrating point)에 대한 관통면(penetrated plane)에 벌칙 스프링(penalty spring) 및 마찰력을 부여받게 되어, 수직 및 전단방향의 거동이 결정된다. 따라서, 불연속 변형해석의 수치해석 과정에서 상기한 4가지 접촉의 형태는 최종적인 관통점과 관통면을 정의하기 위한 중간과정이라 할 수 있다.

관통점과 관통면이 결정되면, 관통점의 좌표 P_0 와 변위 u_0 , 관통면상의 서로 다른 세 점의 좌표와 각각의 변위, $P_1, P_2, P_3, u_1, u_2, u_3$ 를 이용하여 수직방향 및 전단방향의 접촉 스프링에 의한 에너지 평형방정식을 전체 평형방정식에 추가한다(장현익, 2001).

기존의 접촉해석 기법을 이용한 점-점 접촉의 경우, 위의 그림에서와 같이 한 접촉지점에 대해서 해당 꼭지점을 포함하는 총 6개의 접촉면 중 하나를 선택하여 관통면으로 결정한다. 그런데 6개의 접촉면 중 가장 적합한 관통면을 선택하는 것은 힘들뿐 만아니라, 6개의 접촉면을 변경해가면서 해석을 수행하여 적합 관통면을 찾아야 하는 등, 접촉해석의 정확도와 해석 시간을 요구한다. 또한 미세한 블록의 거동에도 접촉면이 갑자기 변하는 경우, 그로 인한 벌칙스프링의 갑작스런 위치 및 관통 깊이(penetration depth) 변화로 인해 블록에 큰 힘이 가해지는 등, 접촉의 안정성에도 크게 영향을 미친다. 특히 암반역학 분야의 지하 공간해석의 경우, 대부분의 해석대상이 지하 공간상에서 절리에 의해 발생된 블록들이 서로 맞물려있는 것으로 입력된다는 점을 고려한다면, 대부분의 접촉의 형태는 점-점 접촉이므로, 3차원 불연속 변형해석의 해석 효율에 결정적인 영향을 미친다고 할 수 있다.

3. 내접구를 이용한 접촉 처리 기법

Y. Ohnishi(2005)는 2차원 불연속 접촉해석 과정에서 다면체(polygon)가 아닌 원형입자(elliptic elements)를 이용하여 해석을 하는 알고리즘을 개발한 바 있다. 이와 비슷한 과정으로 3차원 불연속변형해석에도 구형 형태의 입자를 적용할 수 있겠으나, 실제 암반역학분야의 해석대상에서 원형입자는 많지 않으며, PFC3D와 같은 형태의 원형입자를 적용할 경우, 입자내부의 응력과 변형까지 고려한다는 점을 감안하면 해석에 필요한 메모리 및 해석시간의 요구량이 현재의 컴퓨터 기술로는 감당할 수 있는 수준일 것이다.

본 연구에서는 3차원 블록의 모서리에 내접하는 구를 삽입하여 블록간의 접촉에 해석에 적용하는 방법을 연구하였다.

3.1 4면체에 접하는 내접구(inscribed sphere)

오른쪽 그림 3.1은 4면체와 그에 내접하는 구를 표현한 것이다. Y.A. Fiagbedzi(2004)는 하나의 4면체는 오직 하나의 내접구를 갖는 다는 것을 증명하였으며, 아래와 같은 식으로 표현하였다.

4면체를 구성하는 4개의 평면을 아래와 같이 정의한다면,

$$\Pi_i: a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0, \quad i = 1, \dots, 4$$

이 4 평면에 의한 4면체에 내접하는 구의 반지름 r 과 중심좌표 \bar{x}_0 는 각각 아래 식 3.1과 3.2와 같다.

$$r = \frac{d_4 - (a_4 \ b_4 \ c_4) \cdot A_0^{-1} d_0}{\sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2} \operatorname{sgn}(\Pi_4(\bar{x})) - (a_4 \ b_4 \ c_4) \cdot A_0^{-1} b_0} \quad (\text{식 3.1})$$

$$\bar{x}_0 = A_0^{-1} \{r b_0 - d_0\} \quad (\text{식 3.2})$$

식에 사용된 변수의 정의는 아래 식 3.3과 같다.

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \operatorname{sgn}(\Pi_1(\bar{x})) \\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \operatorname{sgn}(\Pi_2(\bar{x})) \\ \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2} \operatorname{sgn}(\Pi_3(\bar{x})) \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad d_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (\text{식 3.3})$$

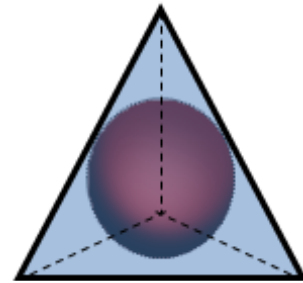


그림 3.1 4면체와 내접구

3.2 내접구를 이용한 점-점 접촉과 점-면 접촉

3.1절에서 유도한 내접구의 중심좌표와 반지름을 3차원 블록상의 모서리에 적용하는 방법은 그림 3.2와 같다. 우선 그림 3.2(a)와 같이 블록의 꼭지점을 구성하는 3모서리를 이용하여 일정 크기의 벡터를 구하고, 그림 3.2(b)와 같이 3 벡터의 끝점의 좌표들과 꼭지점의 좌표를 이용하여, 4 평면을 구성한다. 그 후 3.2(c)와 같이 구성된 4개의 평면에 내접하는 구를 식 (3.1)과 식(3.2)와 같이 얻을 수 있다. 접촉이 발생하는 모든 블록의 꼭지점에 이와같은 방법으로 내접구를 삽입한다.

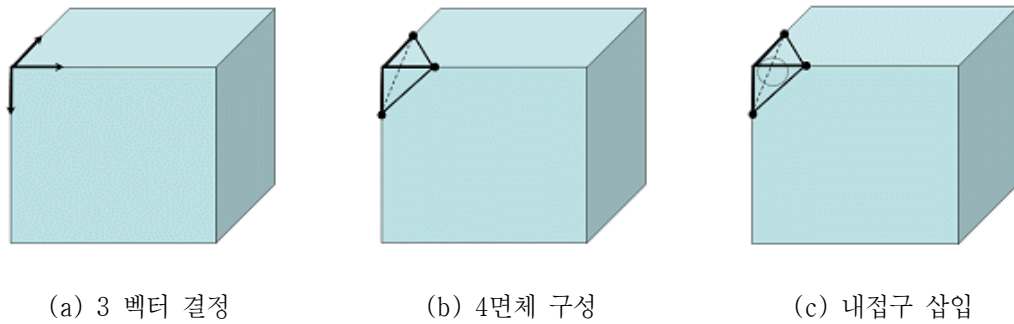


그림 3.2 블록의 모서리에 내접구를 삽입하는 과정

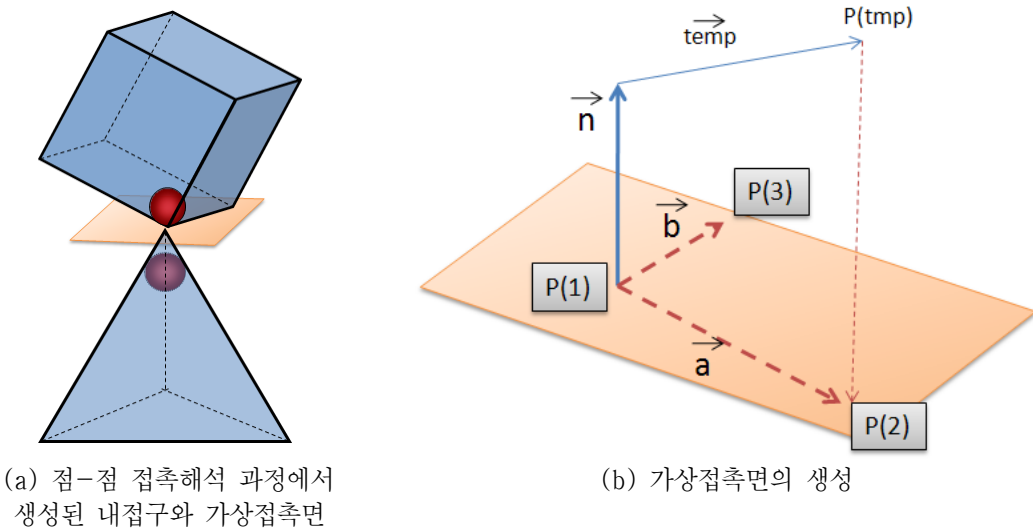


그림 3.3 점-점 접촉의 내접구 및 가상접촉면 생성

블록의 꼭지점끼리 접촉하는 점-점 접촉의 경우, 기존의 방법으로는 두 블록 중 하나의 꼭지점이 다른 블록의 꼭지점을 포함하는 3개의 면중 가장 적합한 관통면을 선택해야 하지만, 내접구를 삽입한 경우 두 내접구의 위치관계에 의해 가상의 접촉면을 생성할 수 있다. 그림 3.3(a)와 같이 2개의 내접구가 위치할 때, 접촉면은 그림 3.3(b)와 같은 과정을 거쳐 생성되도록 하였다. 두 내접구의 중심좌표와 반지름을 알면, 가상접촉면의 법선벡터 \vec{n} 과 한

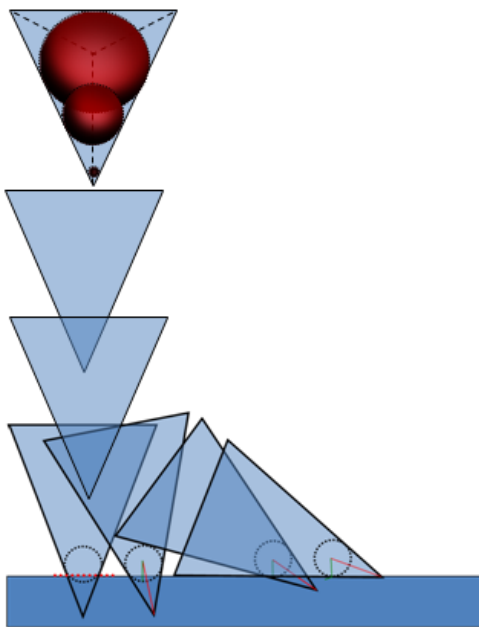
점 $P(1)$ 을 알 수 있으므로, \vec{n} 과 같지 않은 임의의 벡터 \vec{temp} 를 생성하고, 이를 이용하여 $P(1)$ 과 같은 점이 아닌 $P(2)$ 와 $P(3)$ 를 정의할 수 있다. 이를 이용하여 2장에서 언급한 접촉스프링을 설치하면(장현익, 2001) 내접구에 의한 접촉해석 기법이 적용되는 것이다.

점-점 접촉이 아닌 점-면 접촉과 점-모서리 접촉의 경우는 관통면은 실제 블록의 면을 그대로 사용하되, 관통점은 꼭지점이 속한 블록에 삽입된 내접구에 의해 결정한다.

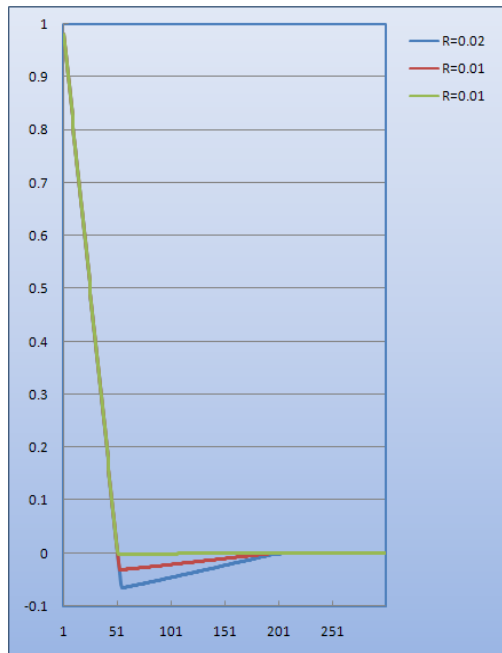
4. 알고리즘의 검증과 해석 예

4.1 자유낙하 실험을 통한 정확성 검증

세 변의 길이가 각각 10m인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 20m인 사면체를 생성하고, 사면체를 1m 높이에서 자유낙하 시키는 해석을 수행하였다. 이때, 내접하는 내접구의 크기를 달리하면서 해석의 정확도를 수행하였다. 내접구의 크기는 꼭지점에서 생성하는 4면체의 크기에 따라 결정된다. 그림 3.2(a)에서처럼 생성하는 3개의 벡터를 생성할 때, 실제블록의 모서리의 길이에 대한 생성된 벡터의 크기의 비율을 R 로 정의했을 때, R 의 값을 각각 0.02, 0.01, 0.001 의 3가지의 크기로 내접구를 생성하였다. 이 R 값은 경험에 의해 결정된 값으로써 내접구의 크기가 해당 값보다 커지면 해석의 오차가 커지고, 작아지면 한 스텝 내에서의 허용변위의 크기보다 작아져 접촉을 찾고 정의하기가 힘들어지므로 적당한 범위 내에서 결정하였다. 그림 4.1(a)은 본 실험에 대한 개념도로써 표현된 3개의 내접구는 R 값이 각각 1, 0.5, 0.1일 때의 내접구이며, 실제 해석에서 삽입된 내접구는 그 크기가 훨씬 작다.



(a) 면체 자유낙하 개념도



(b) 가상접촉면의 생성

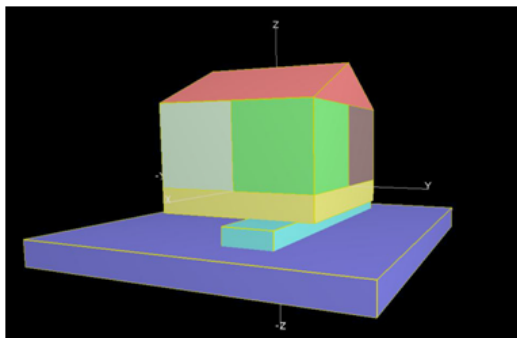
그림 4.1 내접구 접촉해석을 이용한 불연속변형해석 예

그림 4.1(b)는 총 300 스텝의 해석을 통해 얻어진 블록의 꼭지점의 높이 값을 비교한 그래프이다. 그래프로 알 수 있듯이, 자유낙하한 4면체는 50스텝에 지면에 도달하였고, 이후 넘어지기 시작하여 200스텝이 되어 바닥에 완전히 쓰러졌다.

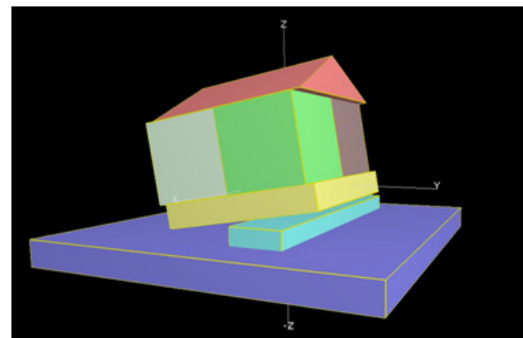
이때에 꼭지점이 지면에 얼마만큼의 관통을 허용하는지 확인하였다. 확인결과 $R=0.001$ 을 적용하였을 때 최대 3.2cm의 관통을 허용하였고, $R=0.01$ 일 때 32cm, $R=0.02$ 일 때 65cm의 관통을 허용하였다. 블록의 지면낙하 직후 최대관통을 허용하고, 이후 블록이 쓰러지면서 관통오차는 0으로 수렴함을 확인하였다. 블록의 높이가 20m 인 점과 대부분의 지하공간에서의 블록간의 접촉이 위의 실험에서의 관통직후의 형태가 아닌 수렴 후와 같은 형태로 접촉하고 있음을 감안한다면 충분히 허용가능한 오차라고 판단할 수 있다.

4.2 내접구를 적용한 불연속변형해석 예

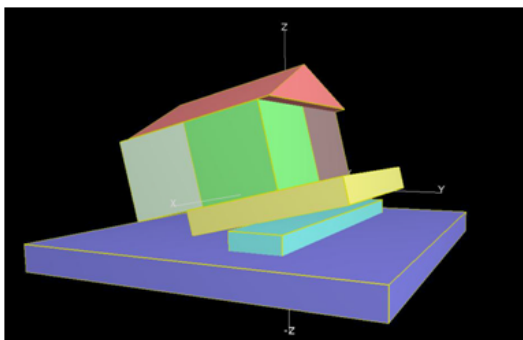
내접구를 이용한 접촉기법을 적용하여 그림과 같이 간단한 블록모형을 해석하여 보았다. 그림 4.2(a)와 같이 총 8개의 블록으로 구성된 간단한 블록모형을 만들고, 하단 받침에 해당하는 한 개의 받침블록을 제거하였다. 그림 4.2(a)에는 총 52개의 접촉이 찾아졌으며, 그중 하단 받침블록에서의 4개의 모서리-모서리 접촉과, 4개의 점-면 접촉을 제외한 나머지 44개의 접촉은 모두 점-점 접촉이다. 이후의 해석과정에서 보듯이 총 접촉의 개수와 형태는 계속 바뀌지만, 삽입된 내접구에 의한 접촉해석 알고리즘은 잘 작동함을 확인할 수 있었다.



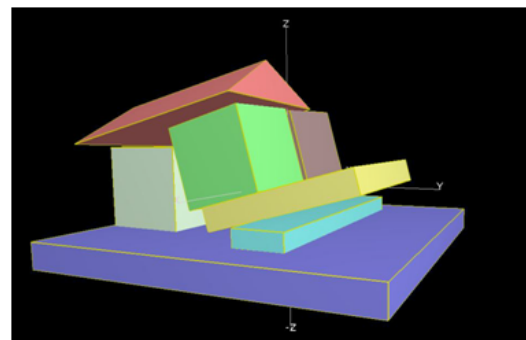
(a) 받침블록 제거 직후



(b) 1,000 스텝 후의 거동



(c) 2,500 스텝 후의 거동



(d) 5,000 스텝 후의 거동

그림 4.2 내접구 접촉해석을 이용한 불연속변형해석 예

5. 결론

본 연구를 통해 3차원 불연속 변형해석의 접촉해석 과정 중 블록의 꼭지점(vertex)에서 접촉이 발생하는 경우, 꼭지점에 내접하는 내접구를 삽입하여 접촉해석을 수행하는 알고리즘을 개발하였다. 개발된 알고리즘을 자유낙하 실험을 통해 그 정확도를 검증하고, 블록모형 해석을 통해 적용된 알고리즘이 잘 작동함을 확인하였다.

내접구를 삽입하여 가상의 접촉점과 접촉면을 생성함으로써, 기존의 접촉해석과정이 가지고 있던 해석시간의 비효율성과 접촉면의 갑작스러운 변화로 인해 발생하는 해석의 불안정성을 개선할 수 있는 만큼, 향후 3차원 불연속변형해석의 접촉해석 알고리즘이 가지고 있는 복잡한 문제들을 해결할 수 있는 좋은 알고리즘이 될 수 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 국토해양부가 출연하고 상지대학교 낙석 및 산사태 방재연구단에서 위탁 시행한 국토해양부 지역기술혁신 연구개발사업에 의한 연구결과물의 일부로서 관계기관에 깊이 감사드립니다.

참고문헌

1. 장현익, 2001, 삼차원 불연속 변형 해석기법의 개발과 붕괴 사면에의 적용, 서울대학교 공학박사학위 논문, pp. 22-30.
2. A. R. Keneti, A. Jafari, J. H. Wu, 2008, A new algorithm to identify contact patterns between convex blocks for three-dimensional discontinuous deformation analysis, *Computers and Geotechnics*, pp. 47-57.
3. E. G. Nezami, Y. M. Hashash, D. Zhao, J. Ghaboussi, 2004, A fast contact detection algorithm for 3-D discrete element Method, *Computers and Geotechnics* 31, pp. 575-587.
4. Jian-Hong Wu, 2008, New edge-to-edge contact calculation algorithm in three-dimensional discrete numerical analysis, *Advances in Engineering Software* 39, pp. 15-24.
5. M, R, Yeung, Q. H. Jian, N. Sun, 2007, A model of edge-to-edge contact for three-dimensional discontinuous deformation analysis, *Computers and Geotechnics* 34, pp. 175-186
6. Y. A. Fiagbedzi, M. El-Gebeily, 2004, Classroom note: The inscribed sphere of an n-simplex, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 35(2), pp. 261-268.
7. Y. Ohnishi, S. Nishiyama, and S. Akao, 2005, *Proceedings of the 7th International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation*.