

# 초음파 유속 센서에서 탄성파 모드 전환

## Mode Conversion of Elastic Waves in an Ultrasonic Flowmeter Sensor

김태연\* · 이정구\* · 김진오†

Tae Eon Kim, Jung Gu Lee, Jin Oh Kim

### 1. 서 론

초음파 센서 기술은 유체의 여러 가지 물리량을 측정하는데에 활용되고 있다.<sup>(1)</sup> 그 중 한 사례가 관 내에서 흐르는 유체의 유속을 측정하는 초음파 센서이다.<sup>(2)</sup>

유체 내에 초음파를 전파시키려면, 변환기(transducer)로써 전기 신호를 진동으로 변환하고, 그 진동이 유체 경계면에까지 고체에서 탄성파 형태로 전파하게 한다. Fig. 1에서 보듯이 탄성파의 경로는 변환기로부터 웨지를 거쳐 관 벽으로 이어진다. 웨지는 송수신부에서 관 벽을 통해 전파된 탄성파가 변환기로 전파해가는 경로를 만들어주는 물체이다.

고체 내의 탄성파는 종파나 횡파의 형태로 전파하는데, 고체 경계면에 비스듬히 입사하여 투과할 때에는 종파와 횡파로 굴절한다. 입사각과 굴절각의 관계는 Snell의 법칙으로 설명된다. 경우에 따라서는 종파로 입사한 파동이 횡파로만 굴절하거나 횡파로 입사한 파동이 종파로만 굴절되어 투과한다. 이러한 현상을 모드 전환(mode conversion)이라 한다.<sup>(3-5)</sup> 본 논문은 초음파 유속 센서에서 초음파가 투과해갈 때, 관 벽에서 발생하는 모드 전환 현상을 다룬다.

### 2. 종파 에너지 투과 해석

두 가지 고체 매질의 경계면에 비스듬히 입사하는 탄성파는 Fig. 2에 보인 바와 같이 일반적으로 종파와 횡파의 형태로 반사와 투과를 한다.<sup>(4,5)</sup> Fig. 2에서 첨자 0은 입사파를 의미하며, 종파 또는 횡파이다. 또한 첨자 1과 2는 각각 반사파의 종파와 횡파이고, 첨자 3과 4는 각각 투과파의 종파와 횡파이다.

이러한 탄성파를 다루는 문헌들은 대개 파동 변위 또는 응력의 관점에서 반사율과 투과율을 제시한다.<sup>(4)</sup> 파동은 매질의 전파가 아니라 에너지의 전파이므로, 반사율과 투과율을 파동 에너지의 관점에서 제시할 필요가 있다.

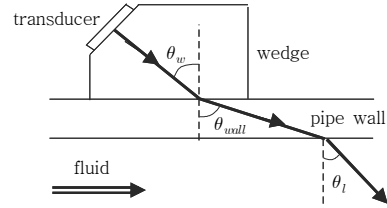


Fig. 1 Refraction of elastic waves

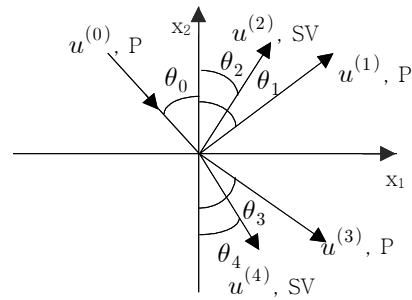


Fig. 2 Incident, reflected and refracted waves

파동 변위  $\mathbf{u}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{u} = A \mathbf{d} \exp[ik(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct)] = u_1 \mathbf{i}_1 + u_2 \mathbf{i}_2 \quad (1)$$

여기서  $A$ 는 진폭,  $\mathbf{d}$ 는 변위 방향 단위벡터,  $k$ 는 파동수,  $\mathbf{p}$ 는 전파 방향 단위벡터,  $c$ 는 전파속도,  $\mathbf{x} (= x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2)$ 는 위치벡터를 의미한다.

파동 응력은 다음과 같다.

$$\sigma_2 = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (2)$$

$$\tau_{21} = G \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (3)$$

파동 에너지는 다음과 같다.

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt = \frac{\rho c \dot{u}_a^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})}{2} \quad (4)$$

$$\Pi = \rho c \dot{u}_a^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \{ \exp[ik(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct)] \}^2 \quad (5)$$

$\mathbf{n}$ 은 경계면에서의 수직방향 단위벡터이고,  $\dot{u}_a$ 은 속도의 크기이다.

입사파, 반사파, 굴절파를 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

† 숭실대학교 공과대학 기계공학과  
E-mail : jokim@ssu.ac.kr  
Tel : (02) 820-0662, Fax : (02) 820-0668

\* 숭실대학교 대학원 기계공학과

$$\mathbf{u}^{(0)} = A_0(\mathbf{i}_1 \sin \theta_0 - \mathbf{i}_2 \cos \theta_0) \exp[ik_0(x_1 \sin \theta_0 - x_2 \cos \theta_0 - c_t^a t)] \quad (6)$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = A_1(\mathbf{i}_1 \sin \theta_1 + \mathbf{i}_2 \cos \theta_1) \exp[ik_1(x_1 \sin \theta_1 + x_2 \cos \theta_1 - c_t^a t)] \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = A_2(-\mathbf{i}_1 \cos \theta_2 + \mathbf{i}_2 \sin \theta_2) \exp[ik_2(x_1 \sin \theta_2 + x_2 \cos \theta_2 - c_t^a t)] \quad (8)$$

$$\mathbf{u}^{(3)} = A_3(\mathbf{i}_1 \sin \theta_3 - \mathbf{i}_2 \cos \theta_3) \exp[ik_3(x_1 \sin \theta_3 - x_2 \cos \theta_3 - c_t^b t)] \quad (9)$$

$$\mathbf{u}^{(4)} = A_4(\mathbf{i}_1 \cos \theta_4 + \mathbf{i}_2 \sin \theta_4) \exp[ik_4(x_1 \sin \theta_4 - x_2 \cos \theta_4 - c_t^b t)] \quad (10)$$

경계면에서 각각의 응력, 변위의 합이 0인, 경계조건을 적용하여  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}$ 의 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} -\cos \theta_1 & -\sin \theta_2 & -\cos \theta_3 & \sin \theta_4 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_2 & \sin \theta_3 & \cos \theta_4 \\ -(\lambda^a + 2G^a) \cos 2\theta_1 & -\frac{c_t^a}{c_l^a} G^a \sin 2\theta_1 & \frac{c_t^a}{c_l^a} (\lambda^b + 2G^b) \cos 2\theta_3 & -\frac{c_t^a}{c_l^a} G^b \sin 2\theta_4 \\ -G^a \sin 2\theta_1 & \frac{c_t^a}{c_l^a} G^a \cos 2\theta_1 & -\frac{c_t^a}{c_l^a} G^b \sin 2\theta_3 & -\frac{c_t^a}{c_l^a} G^b \cos 2\theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ \lambda^a + 2G^a \cos 2\theta_0 \\ -G^a \sin 2\theta_0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

이 때, 에너지 반사와 굴절을 구하면 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$\frac{I^{(1)}}{I^{(0)}} = \frac{\rho^a c_l^a \cos \theta_1}{\rho^a c_l^a \cos \theta_0} \left( \frac{k_1}{k_0} \right)^2 \left( \frac{c_l^a}{c_l^a} \right)^2 \left( \frac{A_1}{A_0} \right)^2 = \left( \frac{A_1}{A_0} \right)^2 \quad (12)$$

$$\frac{I^{(2)}}{I^{(0)}} = \frac{\rho^a c_l^a \cos \theta_2}{\rho^a c_l^a \cos \theta_0} \left( \frac{k_2}{k_0} \right)^2 \left( \frac{c_l^a}{c_l^a} \right)^2 \left( \frac{A_2}{A_0} \right)^2 = \frac{c_l^a \cos \theta_2}{c_l^a \cos \theta_0} \left( \frac{A_2}{A_0} \right)^2 \quad (13)$$

$$\frac{I^{(3)}}{I^{(0)}} = \frac{\rho^b c_l^b \cos \theta_3}{\rho^a c_l^a \cos \theta_0} \left( \frac{k_3}{k_0} \right)^2 \left( \frac{c_l^b}{c_l^a} \right)^2 \left( \frac{A_3}{A_0} \right)^2 = \frac{\rho^b c_l^b \cos \theta_3}{\rho^a c_l^a \cos \theta_0} \left( \frac{A_3}{A_0} \right)^2 \quad (14)$$

$$\frac{I^{(4)}}{I^{(0)}} = \frac{\rho^b c_l^b \cos \theta_4}{\rho^a c_l^a \cos \theta_0} \left( \frac{k_4}{k_0} \right)^2 \left( \frac{c_l^b}{c_l^a} \right)^2 \left( \frac{A_4}{A_0} \right)^2 = \frac{\rho^b c_l^b \cos \theta_4}{\rho^a c_l^a \cos \theta_0} \left( \frac{A_4}{A_0} \right)^2 \quad (15)$$

### 3. 종파 에너지 투과율 계산

웨이 재질에 따른 반사/투과 에너지를 계산하였다. 계산에 사용된 물성치를 Table 1에 나타내었다.

Mathmatica를 사용하여 에너지 투과율을 계산하였으며, 입사각에 따른 에너지의 반사/굴절률과 굴절각을 그래프로 나타내면 Fig. 3 및 Fig. 4와 같다.

종파 에너지 투과율을 계산해보면 Fig. 3에서처럼 입사각이 30° ~ 52°사이에서  $\theta_1$ 의 굴절각이 90°가 됨을 볼 수 있다. 이는 종파가 관 벽을 따라서 이동한다, Fig. 4에서 보듯이 횡파만 관 벽을 투과한다.

### 4. 결 론

웨이와 관 벽에서의 에너지 투과율을 확인하기 위하여, 수학적으로 값을 유도하였으며, 시뮬레이션의 결과로 특정 영역의 입사각 범위에서 모드 전환이 발생함을 알 수 있었다. 위의 결과를 이용하여 초음파 유속 센서에서 효율적으로 에너지를 전파하는 입사각을 찾아 웨이를 설계 할 수 있다.

Table 1 properties of materials

	material	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_t$ (m/s)	$c_l$ (m/s)
wedge	PEEK-1000	1320	1070	2612
pipe wall	STS 304	7800	3281	5936

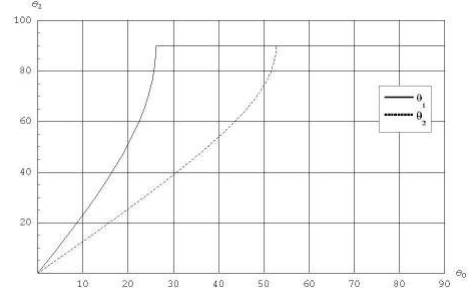


Fig. 3 Reflection and refraction angles

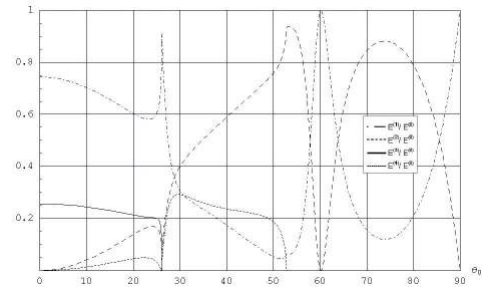


Fig. 4 Energy ratio of reflection and refraction

## 후 기

본 연구는 (주)파나메츠의 산학연구과제를 수행하는 과정에서 얻은 결과임.

## 참고문헌

- (1) Kim, J. O., 2000, "Ultrasonic Sensors and Actuators", Journal of KSNVE, Vol. 10, No. 5, pp. 723-728.
- (2) Lynnworth, L. C., 1989, Ultrasonic Measurements for Process Control, Academic Press, New York, 1989, Chapter 4.
- (3) Kuhn, G. J., Lutsch, A., 1964, "Elastic Wave Mode Conversion at a Solid-Solid Boundary with Transverse Slip", The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 33, No. 7, pp. 949-954.
- (4) Achenbach, J. D., 1975, Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, Amsterdam, Chapter 5.
- (5) Lester, L. S., 1998, Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation, Plenum, New York, Chapter 6.
- (6) Rose, J. L., 1999, Ultrasonic Waves in Solid Media, Cambridge University Press, Chapter 5.