

점도 센서용 비틀림 진동 봉의 끝 면과 인접한 점성유체의 상호작용

Interaction of an Adjacent Viscous Fluid with the End Face of a Torsionally-Vibrating Rod for a Viscosity Sensor

김진오† · 전한용*

Jim Oh Kim†, Han Yong Chun*

1. 서 론

점도 변화 측정을 통해 엔진 오일의 상태를 모니터링 하는 연구가 진행되고 있다⁽¹⁾. 현장에서 사용하는 센서는 실시간 측정이 가능하고 크기가 작아야 한다.

실시간 점도 측정 장치의 한 예로 비틀림 진동자 방식의 점도계가 있다⁽²⁾. 이는 원형 봉(rod)이 점성 유체에 잠겨 비틀림 진동을 하면, 고체의 운동이 인접한 점성유체에 전달응력을 가하고, 유체로부터는 점성 저항을 받아 진동 특성이 변화한다는 원리를 이용한 것이다.

이 때 봉의 단면적은 원주면 면적에 비해 매우 작아서 봉의 끝 면의 영향이 무시되었다. 센서를 소형화하기 위하여 진동 봉의 길이를 대폭 축소하고 그 대신 단면을 약간 크게 하는 방안이 있다. 이 경우에 봉의 끝 면에서 인접한 점성유체의 영향을 무시할 수 없다.

본 논문은 Fig. 1에 보인 바와 같이 짧고 굵은 봉의 끝 면과 인접한 점성유체의 상호작용을 연구하였다. 연구 대상의 봉은 점도 센서로서 크기를 줄일 수 있는 장점이 있다. 봉의 한 쪽 끝은 비틀림 변환기⁽³⁾에 의해 가진된다. 비틀림 진동 봉의 끝 면과 인접한 점성유체의 상호작용을 이론적으로 해석하여 임밀해를 구하고, 고유진동수와 감쇠비로 진동특성을 평가한다.

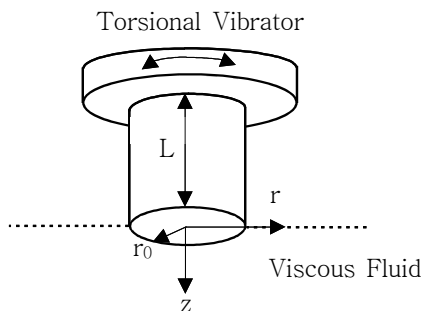


Fig. 1 Schematic diagram of a circular rod in contact with a viscous fluid at one end face

2. 문제의 정식화

원형 봉의 한쪽 끝 면이 점성 유체에 인접해 있고, 다른 쪽 끝은 비틀림 변환기에 의해 비틀림 진동을 하고 있다. 봉의 전단탄성계수는 G 이고 밀도는 ρ_s , 유체의 점도는 μ 이고 밀도는 ρ_f 이다. 봉에서 원주방향 변위 $u_\theta(r, z, t)$ 와 점성 유체에서 원주방향 속도 $v_\theta(r, z, t)$ 로 표현된 지배 방정식과 경계 조건들을 봉의 단면 반지름 r_0 , 속도 $c_0 = (G/\rho_s)^{1/2}$, 시간 r_0/c_0 로 무차원화 하면, 봉의 무차원 변위 u 와 점성 유체의 무차원 속도 v 및 무차원 변수 $\xi (= r/r_0)$, $\zeta (= z/r_0)$, $\tau (= t c_0/r_0)$ 로 표현된다. 무차원화 된 지배 방정식은 식 (1), (2)와 같다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \right) \quad (2)$$

무차원화 된 경계 조건은 식 (3)~(10)과 같다.

$$u = 0 \quad \text{at } 0 \leq \xi \leq 1 \text{ \& } \zeta = -l \quad (3)$$

$$u = 0 \quad \text{at } \xi = 0 \text{ \& } -l \leq \zeta \leq 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{\xi} = 0 \quad \text{at } \xi = 1 \text{ \& } -l \leq \zeta \leq 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{at } 1 < \xi < \infty \text{ \& } \zeta = 0 \quad (6)$$

$$v \rightarrow 0 \quad \text{at } 0 \leq \xi < \infty \text{ \& } \zeta \rightarrow \infty \quad (7)$$

$$v \rightarrow 0 \quad \text{at } \xi \rightarrow \infty \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = v \quad \text{at } 0 \leq \xi \leq 1 \text{ \& } \zeta = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\rho}{R} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \text{at } 0 \leq \xi \leq 1 \text{ \& } \zeta = 0 \quad (10)$$

3. 임밀해

식 (1)의 해는 다음과 같은 형태를 취한다.

$$u(\xi, \zeta, \tau) = X(\xi) U(\zeta) \exp[i(\omega + ih)\tau] \quad (11)$$

식 (2)의 해는 점성 유체와 인접한 봉의 끝 면의 영역에 따라 다음과 같은 형태를 취한다.

† 교신저자 : 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@ssu.ac.kr
Tel : (02) 820-0662, Fax : (02) 820-0668

* 숭실대학교 대학원 기계공학과

$$v_i(\xi, \zeta, \tau) = X(\xi) V(\zeta) \exp[i(\omega + ih)\tau] \quad (12)$$

$$(0 \leq \xi \leq 1)$$

$$v_o(\xi, \zeta, \tau) = Y(\xi) V(\zeta) \exp[i(\omega + ih)\tau] \quad (13)$$

$$(1 \leq \xi \leq \infty)$$

여기서 $\omega (= \tilde{\omega} r_0 / c_0)$ 와 $h (= \tilde{h} r_0 / c_0)$ 는 무차원화 된 고유진동수 및 감쇠비이다.

식 (11)을 식 (1)에 대입한 후, 변수분리하면 아래의 식으로 된다.

$$U'' + k_1^2 U = 0 \quad (14)$$

$$\xi^2 X'' + \xi X' - (p^2 \xi^2 + 1) X = 0 \quad (15)$$

여기서 $p^2 = k_1^2 - (\omega + ih)^2$ 이다.

p 의 값에 따라 모드가 결정되고, p 가 가장 작은 값인 0인 기본 모드가 주된 관심 사항이다. $p = 0$ 이면 $k_1^2 = (\omega + ih)^2$ 이고, 식 (15)는 다음과 같이 된다.

$$\xi^2 X'' + \xi X' - X = 0 \quad (16)$$

경계조건을 적용한 식 (16)의 해는 다음 식으로 된다.

$$u(\xi, \zeta, \tau) = A \xi \sin k_1 (\zeta + l) \exp[i k_1 \tau] \quad (17)$$

또한, 식 (13)을 식 (2)에 대입하고, 경계조건을 적용하여 기본 모드에 대해 정리하면

$$v_i(\xi, \zeta, \tau) = B \xi \exp[-\sqrt{i k_1 R} \zeta] \exp[i k_1 \tau] \quad (18)$$

$$v_o(\xi, \zeta, \tau) = C \frac{1}{\xi} \exp[-\sqrt{i k_1 R} \zeta] \exp[i k_1 \tau] \quad (19)$$

로 해를 구할 수 있다.

봉의 변위 u 와 점성유체의 속도 v 에 대한 식 (17)과 (18)을 경계조건 (9), (10)에 대입하여 정리하면 다음의 특성 방정식을 얻을 수 있다.

$$\tan k_1 l = (\sqrt{i} \sqrt{Rl} / \rho) (1 / \sqrt{k_1 l}) \quad (20)$$

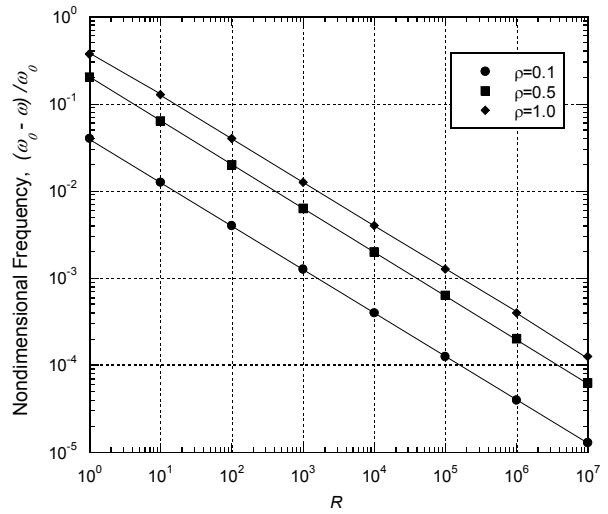
특성 방정식 (20)은 (ω, h) 와 (R, ρ) 의 관계, 즉 $\omega = \omega(R, \rho)$ 와 $h = h(R, \rho)$ 를 제공한다. 식 (20)의 해는 Mathematica⁽⁴⁾ 등의 수치해석 프로그램을 이용하여 쉽게 계산할 수 있다.

세 가지 밀도비에 대하여 특성 방정식으로부터 계산한 무차원화 된 고유진동수 및 감쇠비를 점성유체의 점도에 관한 함수로 Fig. 2에 나타내었다.

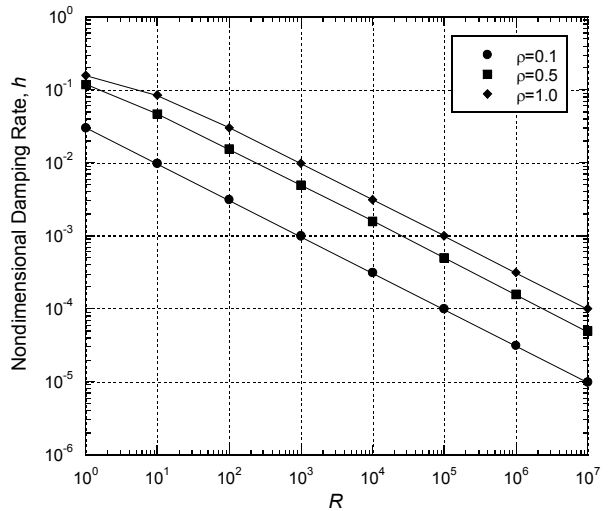
4. 결 론

비틀림 진동을 하는 봉의 끝 면에 인접한 유체의 점성저항이 봉의 비틀림 진동특성에 미치는 영향을 규명하였다. 유체의 점도를 나타내는 파라미터로서 고유진동수와 감쇠비의 변화를 택하였고, 방정식을 유도하여 엄밀해를 구하였다.

유체 점도에 따라 고유진동수와 감쇠비가 선형적으로 변화함을 이론적 결과로서 확인하였고, 이 원리를 이용하여 점도 측정 센서로 사용할 수 있는 가능성을 제시하였다.



(a) Nondimensional frequency



(b) Nondimensional damping rate

Fig. 2 Nondimensional parameters obtained from the exact solutions

참고 문헌

- (1) Agoston, A., Ötsch, C., Jakoby, B., 2005, "Viscosity sensors for engine oil condition monitoring Application and interpretation of results", Sensors and Actuators A, Vol. 121, pp. 327-332.
- (2) 전한용, 김진오, 2002, "원형 봉의 비틀림 진동에 의한 유체 점도 측정 연구", 대한기계학회논문집 A권, 제26권, 제6호, pp. 1016-1025.
- (3) 권오수, 김진오, 2001, "량주방향 압전 비틀림 변환기의 진동특성", 대한기계학회논문집 A권, 제25권, 제8호, pp. 1197-1205.
- (4) Wolfram, S., 1999, "The Mathematica Book", Wolfram Media & Cambridge University Press.