

# 단순보 모드형상을 이용하여 변형률 신호에서 동적변위 응답 추정

## Estimation of Dynamic Displacements from Strain Signal using Mode Shapes of Simply Supported Beam

신수봉† · 이선웅\* · 한아름샘\* · 김현수\* · 김희동\*

Soobong Shin, Seon-Ung Lee, Ah Reum Sam Han, Hyun Su Kim, Hee Dong Kim

**Key Words** : Dynamic displacement(동적변위), Strain(변형률), Modal superposition(모드중첩), FBG sensor(FBG센서)

### ABSTRACT

An algorithm is proposed for computing dynamic displacements of a bridge using FBG sensors. An existing algorithm for estimating dynamic displacements of a simply supported beam through mode superposition is extended and applied to various types of bridges with bending and torsional modes. The proposed algorithm is examined through field tests on a suspension span steel deck plate box girder bridge. Guidelines are provided for determining the number of modes and the number of strain gages to be used.

### 1. 서론

구조물의 진동변위를 구하는 것은 구조물 진단 및 유지관리에서 중요한 문제이다. 장대교량과 같이 해상 및 하천을 가로 지르는 구조물의 경우, 시공 중 혹은 공용 중의 동적변위의 계측은 중요한 관리 대상 항목이다. 그러나 계측을 통해 진동변위를 직접 구하는 적절한 방법은 아직 제대로 제시되지 못하고 있는 실정이다.

최근 변위를 간접적으로 계측하려는 다양한 방법들이 시도되고 있다. FBG센서를 사용하는 방법(김남식 등 2002), GPS를 사용한 방법 등이 제시되고 있으나, 이들 방법들은 정적변위 위주의 적용법이거나 동적변위에 적용하기에는 오차가 심각하게 커지는 문제점이 있다.

조재용 등(2005, 2007), Shin et al.(2007), Kang et al.(2007)은 광섬유센서를 사용한 동적처짐을 추정하는 유사한 방법들을 제시하였으나, 이들 모두 일차원적 단순보에 그 적용이 한정되어 있다. 또한 장성진 등(2008)이 모드분해기법을 이용하여 변형률 신호로부터의 동적변위를 추정하는 방법을 연구하였으나 실내실험에 국한되어 있다.

본 연구에서는 이와 같은 문제점을 극복하고 일반 교량에 적용할 수 있는 기법을 제안하였다. 개발된 방법은 기

본적으로 조재용 등(2005, 2007)이 제안한 기존의 방법을 응용하여, 변형률 계측과 구조물 진동모드의 중첩을 통해 동적변위를 추정하고 있다. 다만 다주형 교량과 같이 경간에 비해 폭이 큰 교량의 경우에 횡모드 뿐만이 아니라 비틀림모드도 저차모드에서 쉽게 발생할 수 있고, 현수교와 같은 장대교량의 경우 행어와 케이블을 통한 인접 경간의 진동에 대한 간섭이 발생할 수 있기 때문에 이들을 알고리즘 적용에 고려하였다.

소록대교에서 실시한 현장실험을 통해 개발된 기법을 검증하였으며, 알고리즘의 적용을 위한 진동모드의 개수와 사용할 변형률 게이지의 개수를 결정하는 기준을 제시하였다. 또한 계측오차와 진동형상의 오차가 개발된 알고리즘의 추정결과에 미치는 영향을 분석하였다.

### 2. 동적변위 추정 알고리즘

#### 2.1 모드중첩을 통한 동적변위 추정

동적거동에서 구조물의 동적변위는 모드중첩 및 변수분리에 의해 식 (1)로 표현할 수 있다.

$$u_i(t) = u(x_i, t) = \sum_{j=1}^{nmd} \phi_j(x_i) q_j(t) = \sum_{j=1}^{nmd} \phi_{ij} q_j(t) \quad (1)$$

여기서  $\phi_{ij}$ =j 번째 모드 xi 위치에서의 진동변위,  $q_j$ =j 번째 모드 일반화좌표함수이다.

† 교신저자; 정회원, 인하대학교 토목공학과, 교수  
E-mail : sbshin@inha.ac.kr  
Tel : (032) 860-7552, Fax : (032)873-7560

\* 인하대학교 토목공학과, 석사과정

변형률 계측을 통한 동적변위의 추정은 기본적으로 Euler-Bernoulli 보 이론에서 식 (2)로 유도될 수 있다.

$$\epsilon(x_i, t) = -\kappa(x_i, t)y_c = -u''(x_i, t)y_c \quad (2)$$

여기서  $y_c$ =중립축으로부터의 거리이다.

식 (2)의 곡률은 식 (1)을 사용하여 식 (3)으로 정리할 수 있다.

$$u''(x_i, t) = \sum_{j=1}^{nmd} \phi''_{ij} q_j(t) \quad (3)$$

단순보의 경우 진동형상의 이론식이 식 (4)와 같이 제시되어 있기 때문에 진동형상의 곡률도 식 (4)에서와 같이 표현할 수 있다.

$$\phi_j(x) = \sin \frac{j\pi x}{L}, \quad \phi''_j(x) = -\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{j\pi x}{L} \quad (4)$$

따라서 변형률과 일반화좌표함수와와의 관계는 식 (5)로 정리된다.

$$\epsilon_i(t) = y_r \sum_{j=1}^{nmd} \left[ j^2 \sin \frac{j\pi x_i}{L} q_j(t) \right] \quad (5)$$

여기서  $y_r = (\pi/L)^2 y_c$ 이며 Scale Factor의 값이다.

만약 변형률 계측위치의 개수와 사용 모드의 개수가 동일하다면, 식 (5)에서 일반화좌표함수는 상수정방행렬  $[a_{ij}]$ 의 역행렬을 사용하여 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{q_j(t)\} = \frac{1}{y_r} [a_{ij}]^{-1} \{\epsilon_i(t)\} \quad (6)$$

결론적으로 식 (6)을 식 (1)에 대입하면, 동적변위는 식 (7)과 같이 변형률의 함수로 표현할 수 있다.

$$\{u_i(t)\} = \frac{1}{y_r} [\phi_{ij}] [a_{ij}]^{-1} \{\epsilon_i(t)\} \quad (7)$$

식 (7)에서  $y_r$ 은 중립축의 위치와 단면형상을 정확히 알 경우에는 수계산으로 제시될 수 있는 값이지만, 현장에서 적용할 경우에는 한번의 기준실험을 통해 보정되어야 할 계수가 된다.

## 2.2 사용 모드 및 센서의 개수

변형률 계측위치의 개수와 사용 모드의 수가 서로 다르게 사용될 경우, 식 (6)의 역행렬은 최소자승법에 의해 식

(8)과 같이 나타낼 수 있으며, 동적변위는 식 (9)로 구할 수 있게 된다.

$$\{q_j(t)\} = \frac{1}{y_r} [[a_{ij}]^T [a_{ij}]]^{-1} [a_{ij}]^T \{\epsilon_i(t)\} \quad (8)$$

$$\{u_i(t)\} = \frac{1}{y_r} [\phi_{ij}] [[a_{ij}]^T [a_{ij}]]^{-1} [a_{ij}]^T \{\epsilon_i(t)\} \quad (9)$$

또한 무한개의 해가 성립되지 않게 하기 위해서는 식 (10)의 조건이 만족되어야 한다.

$$N_m \geq nmd \quad (10)$$

여기서  $N_m$ ,  $nmd$ 는 각각 변형률 계측위치의 개수와 사용 모드의 개수로서, 즉 적합한 해를 구하기 위해서는 변형률 계측점의 수가 식의 유도를 위해 사용되는 모드의 개수보다 많아야 한다는 것을 의미한다. 그리고 사용하는 모드의 수는 모드의 참여율이 충분히 진동에너지를 반영할 수 있는 정도로 선택되어야 동적변위의 추정오차가 줄어들게 된다.

따라서 사용 모드의 개수 및 변형률 계측점의 개수는 초기 동적구조해석을 통해 모드의 참여율을 반영한 모드의 개수를 정한 후 결정되어야 한다.

## 3. 현장실험

개발된 알고리즘을 검증하기 위하여 현장실험은 Fig. 1과 같이 소록대교에서 수행하였으며 교량의 제원 및 FBG 센서와 레이저변위계의 위치는 Fig. 2와 Fig. 3에 나타내었다.

소록대교는 국내 유일의 모노 케이블 자정식 현수교이며 연장은 470.000m 이고 주탑의 높이는 EL+81.895m이다.



Fig. 1 Experiment in the field

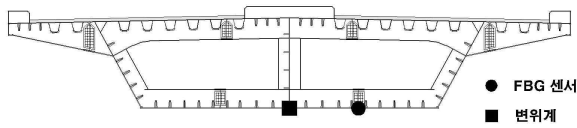


Fig. 2 Measuring points of bridge section

### 3.1 Scale Factor( $y_r$ )의 결정

변위계로 측정한 동적변위를 이용하여 Scale Factor ( $y_r$ )을 보정할 수 있다.

식 (7)과 (9)의 동적변위 추정식에서  $1/y_r$ 을 제거하여 다시 정리하면 식 (11)과 (12)로 나타낼 수 있다. 여기서  $\{\epsilon_i(t)\}^*$ 는 변형률 계측위치별 변환행렬과 변형률의 곱을 나타낸다. 식 (11)은  $N_m = nmd$ 일 때 적용되며, 식 (12)은  $N_m > nmd$  일 때 적용할 수 있다.

$$\{\epsilon_i(t)\}^* = [\phi_{ij}] [a_{ij}]^{-1} \{\epsilon_i(t)\} \quad (11)$$

$$\{\epsilon_i(t)\}^* = [\phi_{ij}] [[a_{ij}]^T [a_{ij}]]^{-1} [a_{ij}]^T \{\epsilon_i(t)\} \quad (12)$$

식 (13)은 식 (11) 또는 식 (12)를 통해 구한 값을 중앙 계측 변위값으로 나누어 각 시간에서의  $y_r(t)$ 를 나타낸다.

$$\{y_r(t)\} = \frac{\{\epsilon_m(t)\}^*}{\{u_m(t)\}} \quad (13)$$

식 (14)는  $y_r(t)$ 의 측정시간동안의 평균값을 나타낸다.

$$y_r = average(\{y_r(t)\}) \quad (14)$$

Fig. 4은 Load Case1(5km)에서 최대변위 발생하는 시간 부근 값이 일정해 지는 구간의 평균을 내어 Scale Factor

( $y_r$ )를  $5.09705e-04$ 으로 결정하였다.

다른 Load Case의 경우에도 이 값을 동일하게 적용하였다.

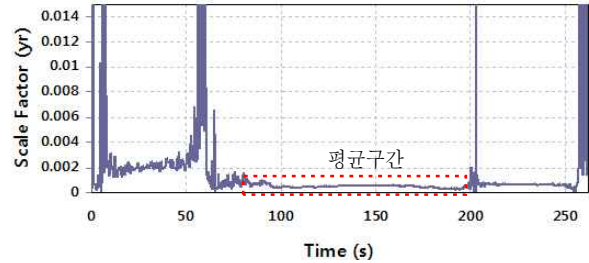


Fig. 4 Estimate of scale factor

### 3.3 각 속도별 동적변위

각각의 하중조건은 Table 1에 정리하였다.

Table 1 Load Case

구 분	이동하중 수	속도 (km/h)
Case1	1	5
Case2	1	10
Case3	1	20
Case4	1	50
Case5	1	60
Case6	1	70
Case7	2	60

여기서 Case 7은 시험차량 두 대가 차량거리 10m 간격을 유지하고 60km/h 속도로 연행한 경우이다.

각 Case별 추정된 동적변위와 계측된 동적변위를 비교하여 Fig. 5에 나타내었다. 또한 추정된 동적변위와 계측된 동적변위의 오차를 Table 2에 정리하였다.

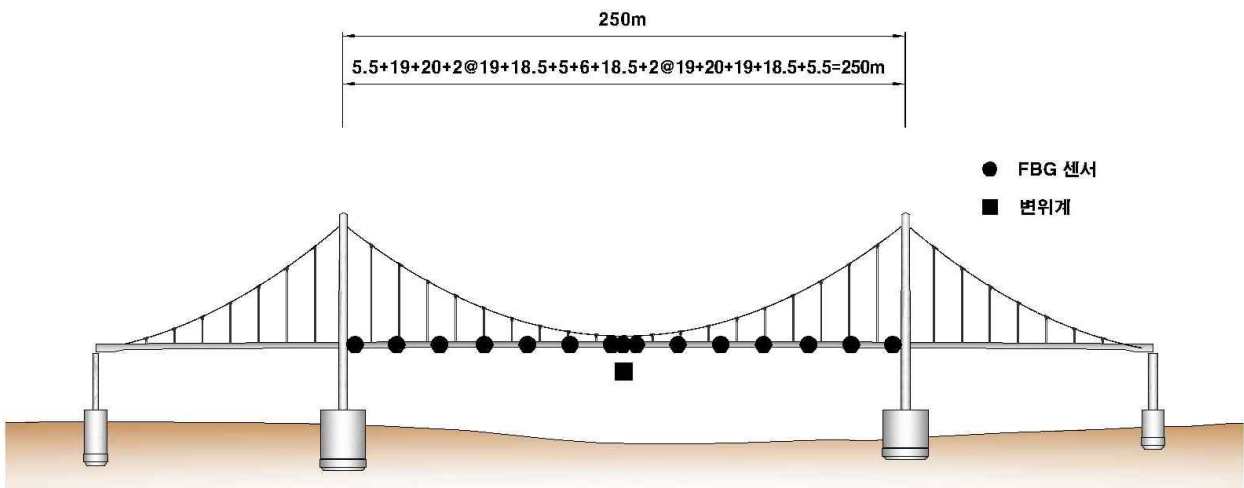
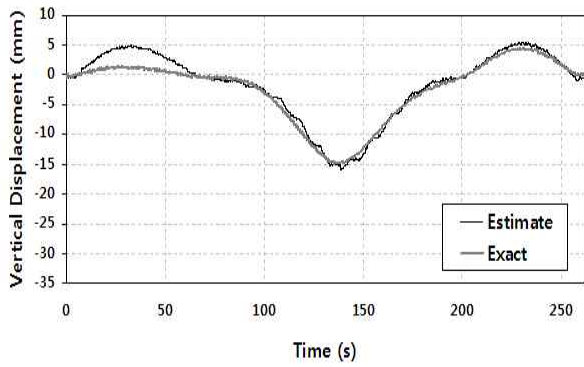
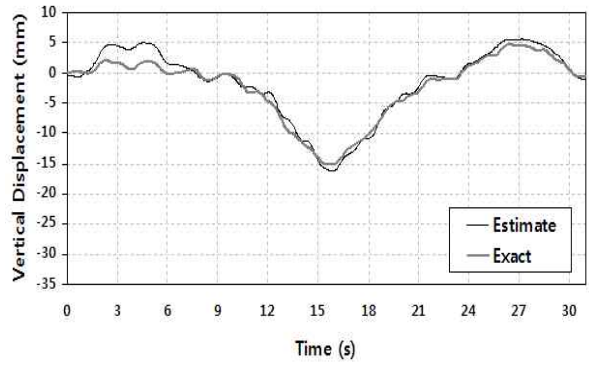


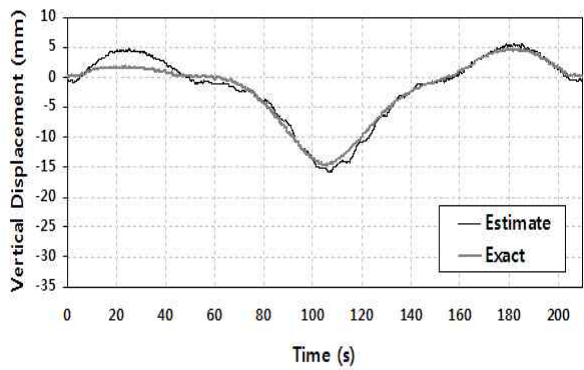
Fig. 3 Specification and Measuring points of bridge



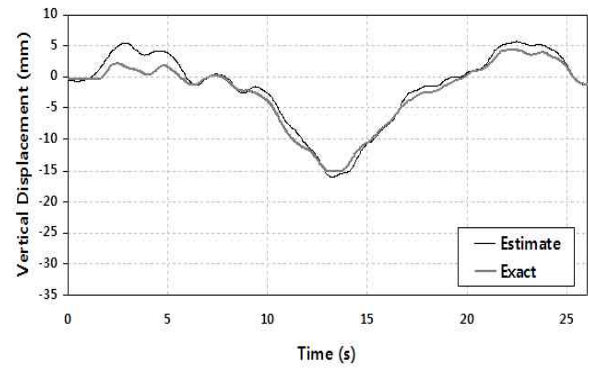
(a) Case 1



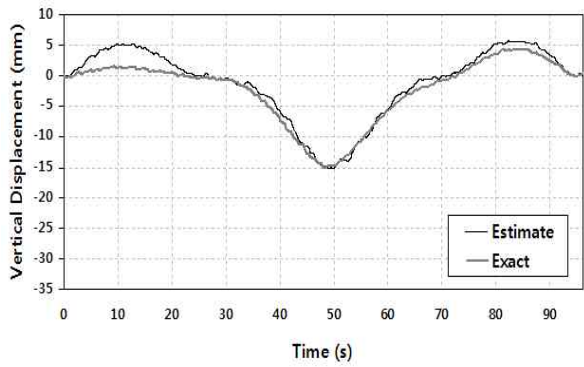
(e) Case 5



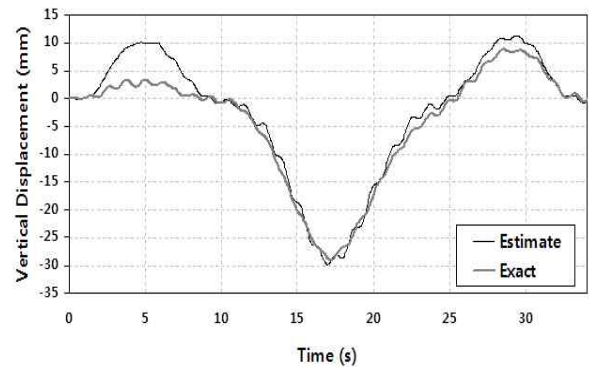
(b) Case 2



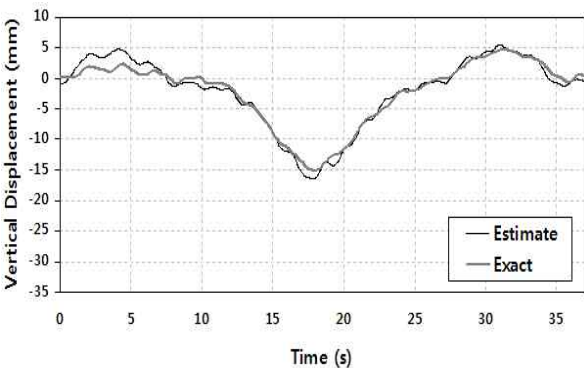
(f) Case 6



(c) Case 3



(g) Case 7



(d) Case 4

Fig. 5 Comparison of displacement in each case

Table 2 Analyses of AE, RMS and Max

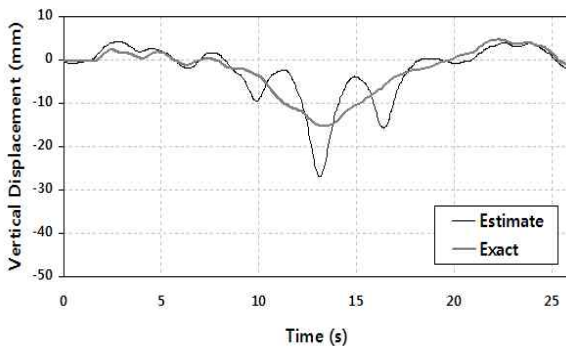
구분	AE (%)	RMS (%)	Max (%)
Case1	24.63	23.21	4.64
Case2	21.21	19.37	8.13
Case3	30.53	26.95	0.33
Case4	20.33	18.22	8.91
Case5	24.15	21.94	6.50
Case6	25.55	23.09	5.22
Case7	25.17	24.06	2.89

Table 2에서 Max Error는 추정된 최대 동적변위와 계측된 최대 동적변위의 오차를 나타낸다.

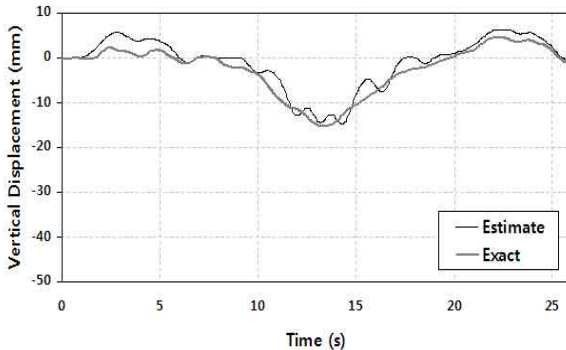
초기 도입부를 제외하고는 추정된 동적변위가 계측된 동적변위를 적절히 유추하고 있는 것으로 판단된다.

### 3.4 사용모드 개수의 영향

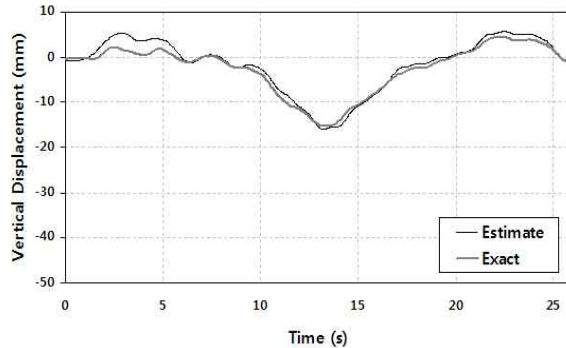
Fig. 6은 사용 모드 개수가 동적변위 추정에 미치는 영향을 알아보기 위하여 하나의 Case 에 계측점의 수와 사용모드의 수를 5개, 10개, 15개로 달리하여 비교하여 나타내었다. 또한 사용모드 개수별 추정된 동적변위와 계측된 동적변위의 오차를 Table 3에 정리하였다.



(a)  $N_m = nmd = 5$



(b)  $N_m = nmd = 10$



(c)  $N_m = nmd = 15$

Fig. 6 Comparison of displacements

Table 3 Analyses of AE, RMS and Max

구분	AE (%)	RMS (%)	Max (%)
$N_m = nmd = 5$	57.76	58.42	76.84
$N_m = nmd = 10$	41.74	34.07	2.17
$N_m = nmd = 15$	25.55	23.09	5.22

Table 3의 결과를 분석해보면 사용모드 개수가 증가함에 따라 AE, RMS, Max는 현저히 감소하였으며, 15개의 계측점과 사용모드의 수를 사용한 경우가 가장 작은 추정 오차를 보였다.

따라서, 계측점과 사용모드의 수가 증가함에 따라 동적변위 추정이 보다 정확한 결과를 보임을 확인할 수 있다.

## 4. 결 론

본 연구에서는 FBG 센서를 통해 계측한 변형률을 사용하여 교량의 동적변위를 추정하는 알고리즘을 제안하였다. 이는 단순히 변형률과 구조물의 진동특성을 이용하여 구조물의 동적변위응답을 측정하는 간단하면서도 효율적인 알고리즘이다.

(1) 많은 수의 계측점 및 사용모드의 수를 결정하면 정확한 동적변위를 추정할 수 있다.

(2) 변형률 계측오차의 영향에 비해 진동형상 오차의 영향이 동적변위를 추정하는데 더 큰 영향을 미치는 것으로 판단된다.

(3) Scale Factor( $y_r$ )을 결정하기 위해서는 하나의 기준 실험이 이루어져야 하지만 기준실험을 통해 결정된 Scale Factor( $y_r$ ) 값은 다른 하중조건에서도 적용 가능하다.

## 후기

이 논문은 사회기반 시설물 평가 중점연구단 지원에 의하여 연구되었음.

## 참고 문헌

- (1) Kim, N. S. and Cho, N. S., 2002, "Estimation of Bridge Deflection Using Fiber Optic Bragg-Grating Sensors," KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 22,6-A, pp.1357-1366.
- (2) Cho, J. Y. and Choi, K. K. and Shin, S., 2005, "Development of Algorithm for Estimating Moving Loads Using Measured Acceleration Data," KSMI Annual Spring Conference, Vol. 9, No. 1 pp.469-474
- (3) Cho, J. Y. and Shin, S. and Choi, K. K. and Kwon, S. J., 2007, "Estimation of Moving Loads by

Measuring Dynamic Response,” Journal of the Korea Institute for Structural Maintenance inspection, Vol. 11, No. 4, pp.129-137.

(4) Chang, S. J. and Kim, N. S., 2008, “Estimation of Displacement Response from the Measured Dynamic Strain Signals Using Mode Decomposition Technique”, KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 22, No. 4-A, pp.507-515.

(5) Kang, L.-H. and Kim, D.-K. and Han, J.-H., 2007, "Estimation of dynamic structural displacements using fiber Bragg grating strain sensors," Journal of Sound and Vibration, No. 305, pp.534-542.

(6) Shin, S. and Han, M. J. and Jo, J. Y. and Lee, H. J. and Jung, B. S., 2007, "Identification of moving forces by measuring bridge dynamic responses," The 3rd Int. Conf. on SHM of Intelligent Infrastructure, pp. 165, 1-6