

단면 테이퍼, 초기 비틀림각, 그리고 장착 각의 영향을 고려한 회전 블레이드의 진동해석

Vibration analysis of rotating blades considering the cross section taper, the pre-twist angle, and the setting angle

이준희* · 유홍희†

Jun Hee Lee and Hong Hee Yoo

Key Words : Vibration Analysis(진동해석), Rotating Pre-twisted Blade(초기 비틀림각을 갖는 회전 블레이드), Tapered Cross Section(테이퍼진 단면), Orientation Angle(자세각), Hybrid Deformation Variable Modeling(복합 변형변수를 이용한 모델링), Loci Veering(궤적 휨 현상)

ABSTRACT

Equations of chordwise and flapwise bending motions for the vibration analysis of rotating pre-twisted blades having tapered cross section and orientation angle are derived by using hybrid deformation variable modeling. The two motions are couples to each other due to the pre-twisted angle of the beam cross section. The derived equations are transformed into dimensionless forms in which dimensionless parameters are identified. The effects of the dimensionless parameters on the modal characteristics of rotating pre-twisted blades having tapered cross section and orientation angle are investigated. The eigenvalue loci veering phenomena is also investigated and discussed in this work.

1. 서 론

회전 외팔보는 발전용 터빈 블레이드, 헬리콥터의 날개, 인공위성 안테나 그리고 풍력 발전기의 블레이드 등의 회전운동을 하는 시스템의 모델로 사용되어왔다. 그리고 원심력을 받는 구조물의 동적 안정성과 진동에 관한 연구는 기계공학, 항공 우주공학 그리고 토목공학 등 많은 분야에 걸쳐 연구자들의 관심의 대상이 되어왔고, 이러한 구조물의 회전운동이 진동특성의 변화를 예측하기 위한 연구가 많이 이루어져 왔다.

회전하는 구조물의 동적 특성에 대한 연구는 일찍이 Southwell 에 의해 시작되었다. ⁽¹⁾ 그는 회전운동에 따른 외팔보의 고유 진동수 변화를 계산할 수 있도록 모델을 제시하였고, 그 후 Schilhansl ⁽²⁾ 은 회전 외팔보의 굽힘 진동 방정식을 유도하고 이에 Ritz방법을 통해 Southwell 방정식의 정확성을 확인하였다. 1970 년대를 거치며 전산기의 발전과 더불어 종래의 해석적 방법을 떠나 수치적인 방법⁽³⁾으로

진동을 해석하려는 연구 결과들이 등장하게 되었다

다. 이 방법들은 고유 진동수를 더 정확하게 구할 수 있을 뿐만 아니라 모드형상도 구할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 이후 회전하는 외팔보의 선형 운동 방정식을 복합 변형 변수를 이용하여 정의하고, Kane 의 방법을 이용한 보 구조물의 다양한 연구들이 수행되었다. ⁽⁴⁻⁶⁾ 한편, 불균일보의 하나인 테이퍼진 단면을 가진 보에 대한 연구에서 Lee 는⁽⁷⁾ 분포 중동력을 받는 테이퍼진 Euler-Bernoulli 보에 대한 동적 안정성을 수행하였다. 그리고 Rossi 와 그의 공동 연구자들은⁽⁸⁾ 단이 있는 Timoshenko 보와 폭(width)이 균일한 테이퍼진 Timoshenko 보에 대한 자유진동에 대해 연구하였다.

회전운동을 하는 대부분의 구조물들은 불균일한 단면형상과 초기 비틀림각 그리고 허브(hub)에 장착되어있는 자세각인 장착각을 가지고 있다. 이때 위의 조건들로 만들어진 구조물은 회전운동을 함에 따라 시스템의 동적 특성 변화를 일으키게 된다. 이러한 동적 특성의 변화는 처음에 소개했던 예제들과 같은 시스템의 작동 성능과 밀접한 관계가 있으므로, 회전운동과 더불어 불균일한 단면과 초기 비틀림각 그리고 자세각을 갖는 블레이드의 연구가 필요하다. 본 연구의 목적은 위의 세가지 요소를 가진 블레이드의 진동해석을 수행하고, 회전 각속도, 테이퍼진

† 교신저자; 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070
* 정회원, 한양대학교 대학원 기계공학과

보의 너비와 두께의 비 그리고 초기 비틀림각과 자세각의 크기등에 따른 해석 결과를 도출하여 시스템의 동적 특성을 분석하는데 있다.

본 논문의 구성은 서론에 이어 복합 변형 변수를 이용하여 자세각과 초기 비틀림각을 갖는 테이퍼진 회전 외팔보의 굽힘 방향 운동 방정식을 Kane의 방법으로 유도하였으며 무차원 변수를 사용해 진동 방정식을 무차원화하였다. 3 장에서는 유도된 진동 방정식에 근거하여 수치 해석을 실시하고, 그 해석 결과를 보이고 동적 특성의 변화에 대해 논의 하였다. 마지막 장에서는 본 논문의 결론을 요약하여 수록하였다.

2. 진동 방정식 유도

2.1 운동 방정식

이 장에서는 복합 변형 변수를 이용하여 회전 구조물의 운동 방정식을 유도한 참고문헌을 참조하여 구한 자세각과 초기 비틀림각을 갖는 테이퍼진 회전 블레이드의 운동 방정식의 유도 과정을 간략히 소개하기로 한다.

Fig. 1 은 자세각과 초기 비틀림각을 갖는 테이퍼진 회전 블레이드의 형상을 나타낸다. 그림에서 보의 탄성축과 중심축은 동일 선상에 위치하고 \hat{a}_1 , \hat{b}_1 과 \hat{b}'_1 은 서로 일치한다. \hat{a}_2 과 \hat{b}_2 혹은 \hat{a}_3 과 \hat{b}_3 이 이루는 각 θ_1 은 자세각을 나타낸다. 그리고 \hat{b}_2 과 \hat{b}'_2

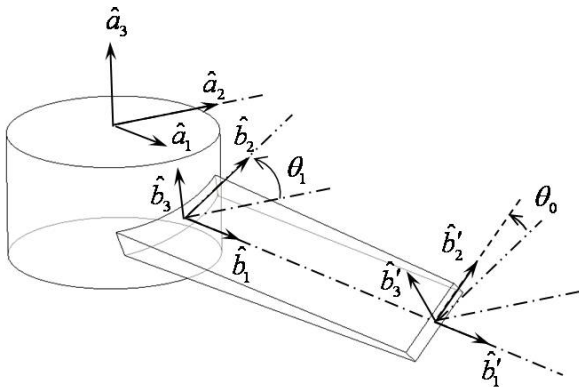


Fig. 1 Configuration of a pre-twisted blade having tapered cross section and orientation angle

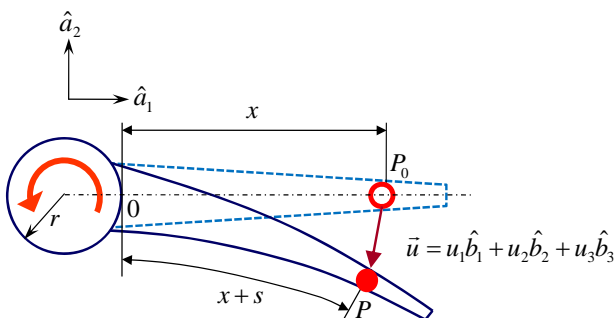


Fig. 2 Deformation of the blade neutral axis

혹은 \hat{b}_3 과 \hat{b}'_3 이 이루는 각 θ_0 는 자유단의 단면이 고정단의 단면에 비해 비틀린 각도이다. Fig. 2는 변형시 탄성축 상에 점들의 위치변화에 따른 탄성 변위들의 의미와 기준 좌표계를 나타내고 있다. \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 은 기준계(reference frame) A에 부착된 단위 벡터들을 나타낸다. 탄성축상에 위치한 임의의 질점 p_0 가 변형후 p 의 위치로 움직일 때 그 변위벡터는 \vec{u} 로 나타내고 있으며 그의 \hat{b}_1 , \hat{b}_2 , \hat{b}_3 방향 성분은 각각 u_1 , u_2 , u_3 로 나타내고 있다. 또한 s 는 임의 질점에서 인장된 길이를 나타낸다. 연속체의 방정식을 근사화하기 위해 가상모드를 이용하여 s , u_2 , u_3 를 다음과 같이 근사화한다.

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x)q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x)q_{2i}(t) \quad (2)$$

$$u_3(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_3} \phi_{3i}(x)q_{3i}(t) \quad (3)$$

여기서, ϕ_{1i} , ϕ_{2i} , ϕ_{3i} 는 s , u_2 , u_3 를 나타내기 위한 가상모드들이며 q_{1i} , q_{2i} , q_{3i} 는 시간의 함수인 일반좌표들을 나타내고 μ_1 , μ_2 , μ_3 는 일반좌표의 개수이다. 반경 r 인 강체축 A가 \hat{a}_3 방향으로 일정한 속력 Ω 로 회전할 때 A의 각속도와 블레이드의 고정점 0의 속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{\omega}^A = \omega_3 \vec{a}_3 \quad (4)$$

$$\vec{v}^0 = r\Omega \vec{a}_2 \quad (5)$$

이때 p 점의 속도 \vec{v}^p 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \vec{v}^p = & [r\Omega c_{21} + \dot{u}_1 + \Omega(c_{32}u_3 - c_{33}u_2)]\hat{b}_1 \\ & + [r\Omega c_{22} + \dot{u}_2 + \Omega\{c_{33}(x+u_1) - c_{31}u_3\}]\hat{b}_2 \quad (6) \\ & + [r\Omega c_{23} + \dot{u}_3 + \Omega\{c_{31}u_2 - c_{32}(x+u_1)\}]\hat{b}_3 \end{aligned}$$

여기서 c_{ij} 는 \hat{a}_i 와 \hat{b}_j 좌표계간의 방향 코사인이나 나타내며 좌표계간에는 다음의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= c_{11}\hat{b}_1 + c_{12}\hat{b}_2 + c_{13}\hat{b}_3 \\ \hat{a}_2 &= c_{21}\hat{b}_1 + c_{22}\hat{b}_2 + c_{23}\hat{b}_3 \\ \hat{a}_3 &= c_{31}\hat{b}_1 + c_{32}\hat{b}_2 + c_{33}\hat{b}_3 \end{aligned} \quad (7)$$

본 연구에서는 Fig. 1에서와 같이 자세각 중에 \hat{a}_2

Table 1 Direction cosine between the two coordinate systems

Orientation Angle(θ_1)					
c_{11}	1	c_{12}	0	c_{13}	0
c_{21}	0	c_{22}	$\cos \theta_1$	c_{23}	$-\sin \theta_1$
c_{31}	0	c_{32}	$\sin \theta_1$	c_{33}	$\cos \theta_1$

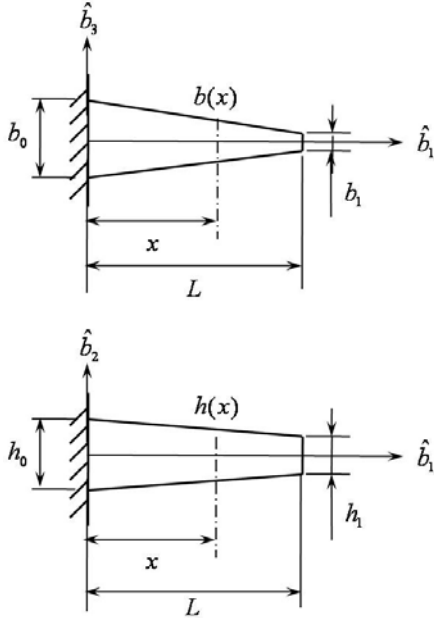


Fig. 3 A blade with tapered cross section

과 \hat{b}_2 혹은 \hat{a}_3 과 \hat{b}_3 이 이루는 각 θ_1 만을 고려하였고 Table 1 은 자세각 θ_1 에 의한 방향 코사인 값을 나타내고 있다. 식 (3)에서 나타나는 u_1 은 s , u_2 와 u_3 로 표시되어야 하며 이를 위해 참고문헌(9)에서 제안된 다음의 근사화된 관계식이 유도되어 사용된다.

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \sigma} \right)^2 \right] d\sigma \quad (8)$$

속도 \vec{v}^p 를 이용하면 시스템의 운동 방정식은 다음 식으로부터 유도될 수 있다.

$$\int_0^l \rho(x) \left(\frac{\partial \vec{v}^p}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \frac{d\vec{v}^p}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (9)$$

여기서 $\rho(x)$ 와 l 은 보의 단위 길이당 질량과 길이를 의미한다. 그런데 Fig. 3 에서와 같이 테이퍼진 단면을 가진 블레이드의 경우 단위 길이당 단면적이

일정하게 변하기 때문에 $\rho(x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\rho(x) = \rho_0 A_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left(1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) \quad (10)$$

식(10)에서 사용된 ρ_0 는 보의 밀도이고, A_0 는 고정단에서 두께가 h_0 이고 폭이 b_0 으로 이루어진 단면적이며 α 와 β 는 다음과 같이 각각 자유단의 두께 h_1 과 폭 b_1 그리고 고정단의 두께 h_0 와 폭 b_0 의 비로 이루어진다.

$$\alpha = \frac{b_1}{b_0}, \quad \beta = \frac{h_1}{h_0} \quad (11)$$

또한 식(9)의 U 는 보의 인장 및 굽힘에 의한 탄성 에너지로 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 + EI_3(x) \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} \right)^2 + EI_2(x) \left(\frac{d^2 u_3}{dx^2} \right)^2 + 2EI_{23}(x) \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 u_3}{dx^2} \right) dx \quad (12)$$

여기서, E 와 $A(x)$ 는 블레이드의 각각 탄성계수와 단면적이다. 임의의 단면에서 블레이드의 2 차 면적 모멘트와 프로덕트를 나타내는 I_2 , I_3 과 I_{23} 을 주면적 모멘트 I_2^* 와 I_3^* 로 나타낼 수 있다.

$$A(x) = b_0 h_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left(1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) \quad (13)$$

$$I_2(x) = \frac{I_2^*(x) + I_3^*(x)}{2} + \frac{I_2^*(x) - I_3^*(x)}{2} \cos(2\theta) \quad (14)$$

$$I_3(x) = \frac{I_2^*(x) + I_3^*(x)}{2} - \frac{I_2^*(x) - I_3^*(x)}{2} \cos(2\theta) \quad (15)$$

$$I_{23}(x) = \frac{I_2^*(x) - I_3^*(x)}{2} \sin(2\theta) \quad (16)$$

$$I_2^*(x) = \frac{b_x b_x^3}{12} = \frac{h_0 b_0^3}{12} \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right)^3 \left(1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) \quad (17)$$

$$I_3^*(x) = \frac{b_x h_x^3}{12} = \frac{b_0 h_0^3}{12} \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left(1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right)^3 \quad (18)$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{l} x \quad (19)$$

여기서 θ 는 블레이드의 임의의 단면에서 비틀림각을 나타내며 따라서 블레이드의 고정단에서 $\theta = 0$, 그리고 자유단에서 $\theta = \theta_0$ 이다. 자세각과 초기 비틀림각을 갖는 테이퍼진 회전 블레이드의 운동 방정식은 이상의 과정을 종합하여 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} [M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + \{K_{ij}^s - (c_{32}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 M_{ij}^{11}\} q_{1j}] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} [c_{31} c_{32} \Omega^2 M_{ij}^{12} q_{2j} - 2c_{33} \Omega M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j}] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} [2c_{32} \Omega M_{ij}^{13} \dot{q}_{3j} + c_{31} c_{33} \Omega^2 M_{ij}^{13} q_{3j}] \\ & = -r(c_{23} c_{32} - c_{22} c_{33}) \Omega^2 P_{1i} + (c_{32}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 Q_{1i} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_1} [c_{31} c_{32} \Omega^2 M_{ij}^{21} q_{1j} \\ & + 2c_{33} \Omega M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j}] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} [K_{ij}^{B2} + (c_{23} c_{32} - c_{22} c_{33}) r \Omega^2 K_{ij}^{GA2} \\ & - (c_{32}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 K_{ij}^{GB2} - (c_{31}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 M_{ij}^{22}] q_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} [(K_{ij}^{B23} + c_{32} c_{33} \Omega^2 M_{ij}^{23}) q_{3j} \\ & - 2c_{31} \Omega M_{ij}^{23} \dot{q}_{3j}] \\ & = r(c_{31} c_{23} - c_{21} c_{33}) \Omega^2 P_{2i} - c_{31} c_{32} \Omega^2 Q_{2i} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_3} M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_1} [c_{31} c_{33} \Omega^2 M_{ij}^{31} q_{1j} \\ & - 2c_{32} \Omega M_{ij}^{31} \dot{q}_{1j}] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} [(c_{32} c_{33} \Omega^2 M_{ij}^{32} + K_{ij}^{B32}) q_{2j} \\ & + 2c_{31} \Omega M_{ij}^{32} \dot{q}_{2j}] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} [(c_{23} c_{32} - c_{22} c_{33}) r \Omega^2 K_{ij}^{GA3} \\ & - (c_{32}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 K_{ij}^{GB3} - (c_{31}^2 + c_{32}^2) \Omega^2 M_{ij}^{33} \\ & + K_{ij}^{B3}] q_{3j} \\ & = r(c_{32} c_{21} - c_{31} c_{22}) \Omega^2 P_{3i} - c_{31} c_{33} \Omega^2 Q_{3i} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 나타나는 행렬요소들은 다음 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} m_{ij}^{ab} &= \int_0^l \rho_0 A_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l}\right) \left(1 + (\beta - 1) \frac{x}{l}\right) \phi_{ai} \phi_{bj} dx \\ k_{ij}^S &= \int_0^l EA_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l}\right) \left(1 + (\beta - 1) \frac{x}{l}\right) \phi'_{ai} \phi'_{bj} dx \\ k_{ij}^{B2} &= \int_0^l EI_3(x) \phi''_{2i} \phi''_{2j} dx \\ k_{ij}^{B3} &= \int_0^l EI_2(x) \phi''_{3i} \phi''_{3j} dx \\ k_{ij}^{Bab} &= \int_0^l EI_{23}(x) \phi''_{ai} \phi''_{bj} dx \\ k_{ij}^{GAa} &= \int_0^l \rho_0 A_0 \left((\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) \frac{x^3}{3l^2} + (\alpha + \beta - 2) \frac{x^2}{2l} \right. \\ & \quad \left. + x - \frac{(2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2)l}{6} \right) \phi'_{ai} \phi'_{aj} dx \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} k_{ij}^{GBa} &= \int_0^l \rho_0 A_0 \left((\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) \frac{x^4}{4l^2} + (\alpha + \beta - 2) \frac{x^3}{3l} \right. \\ & \quad \left. + \frac{x^2}{2} - \frac{(1 + \alpha + \beta + 3\alpha\beta)l^2}{12} \right) \phi'_{ai} \phi'_{aj} dx \end{aligned}$$

$$P_{ai} = \int_0^l \rho_0 A_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l}\right) \left(1 + (\beta - 1) \frac{x}{l}\right) \phi_{ai} dx$$

$$Q_{ai} = \int_0^l \rho_0 A_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l}\right) \left(1 + (\beta - 1) \frac{x}{l}\right) x \phi_{ai} dx$$

운동 방정식 (16)과 (17)은 $\theta = 0$ 이거나 $I_2^* = I_3^*$ 인 경우를 제외하면 항상 서로 연성(coupled) 되어 있음을 알 수 있으며, 이 연성효과에 의한 진동특성 변화가 본 논문의 주요 관심사이다.

2.2 무차원 진동 방정식

회전 블레이드의 경우 인장방향 모드에 의한 고유진동수는 굽힘모드에 의한 진동수에 비해 일반적으로 훨씬 높다. 따라서 이 두 방향 모드들은 거의 서로 간섭 효과를 가지지 않는다는 가정하에 식 (16)과 (17)만을 이용하여 진동해석을 수행하였다. 또한 식 (16)과 (17)을 무차원화된 진동 방정식으로 변환시키기 위해 다음과 같은 무차원 변수들을 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (19)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{l} \quad (20)$$

$$\mathcal{G}_{aj} \equiv \frac{q_{aj}}{l} \quad (21)$$

$$\delta \equiv \frac{r}{l} \quad (22)$$

$$\gamma \equiv \Omega T \quad (23)$$

$$\kappa \equiv \frac{I_2^*}{I_3^*} \quad (24)$$

식 (23)에서 T 는 다음과 같이 정의되는 변수이다.

$$T = \sqrt{\frac{\rho_0 A_0 l^4}{EI_3^*}} \quad (25)$$

무차원 변수로 정의된 식 (24)를 이용하여 식 (14)~(16)을 다시 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{I_2}{I_3^*} = \frac{1}{2}(\kappa+1) + \frac{1}{2}(\kappa-1)\cos(2\theta) \quad (26)$$

$$\frac{I_3}{I_3^*} = \frac{1}{2}(\kappa+1) - \frac{1}{2}(\kappa-1)\cos(2\theta) \quad (27)$$

$$\frac{I_{23}}{I_3^*} = \frac{1}{2}(\kappa-1)\sin(2\theta) \quad (28)$$

이상의 관계식을 이용하여 식 (16)과 (17)을 무차원화된 방정식들로 만들고, Table 1 의 방향 코사인을 이용하여 자세각 θ_1 을 고려하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{22} \ddot{g}_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} [K_{ij}^{B2} + \gamma^2 \{(c_{23}c_{32} - c_{22}c_{33})\delta K_{ij}^{GA2} \\ & - (c_{32}^2 + c_{33}^2)K_{ij}^{GB2} - c_{33}^2 M_{ij}^{22}\}] g_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} (K_{ij}^{B23} + c_{32}c_{33}\gamma^2 M_{ij}^{23}) g_{3j} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{33} \ddot{g}_{3j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} (K_{ij}^{B32} + c_{32}c_{33}\gamma^2 M_{ij}^{32}) g_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} [K_{ij}^{B3} + \gamma^2 \{(c_{23}c_{32} - c_{22}c_{33})\delta K_{ij}^{GA3} \\ & - (c_{32}^2 + c_{33}^2)K_{ij}^{GB3} - c_{32}^2 M_{ij}^{33}\}] g_{3j} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

여기서

$$\begin{aligned} m_{ij}^{ab} &= \int_0^1 (1+(\alpha-1)\xi)(1+(\beta-1)\xi) \varphi_{ai} \varphi_{bj} d\xi \\ k_{ij}^{B2} &= \int_0^1 (1+(\alpha-1)\xi)(1+(\beta-1)\xi)^3 \\ & \left\{ \frac{1}{2}(\kappa+1) - \frac{1}{2}(\kappa-1)\cos(2\theta_0\xi) \right\} \varphi_{2i}'' \varphi_{2j}'' d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{ij}^{B3} &= \int_0^1 (1+(\alpha-1)\xi)(1+(\beta-1)\xi)^3 \\ & \left\{ \frac{1}{2}(\kappa+1) + \frac{1}{2}(\kappa-1)\cos(2\theta_0\xi) \right\} \varphi_{3i}'' \varphi_{3j}'' d\xi \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} k_{ij}^{GAa} &= \int_0^1 \left((\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) \frac{\xi^3}{3} + (\alpha + \beta - 2) \frac{\xi^2}{2} \right. \\ & \left. + \xi - \frac{(2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2)}{6} \right) \varphi_{ai}' \varphi_{aj}' d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{ij}^{GBa} &= \int_0^1 \left((\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) \frac{\xi^4}{4} + (\alpha + \beta - 2) \frac{\xi^3}{3} \right. \\ & \left. + \frac{\xi^2}{2} - \frac{(1 + \alpha + \beta + 3\alpha\beta)}{12} \right) \varphi_{ai}' \varphi_{aj}' d\xi \end{aligned}$$

φ_{aj} 는 ϕ_{aj} 와 동일한 함수값을 가지나 ξ 의 함수이며 \ddot{g}_{aj} 는 g_{aj} 의 τ 에 관한 2 차 미분을 나타낸다. 식 (29)와 (30)에서 g_{2j} 와 g_{3j} 로 구성된 column 벡터를 g 라 하고 이 벡터를 시간에 대한 조화함수로 가정하면

$$g = e^{j\lambda\tau} \underline{\eta} \quad (32)$$

여기서 λ 는 고유 진동수이고 $\underline{\eta}$ 는 모드형상을 나타내는 모드벡터이다. 식 (32)를 이용하면 식 (29)와 (30)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lambda^2 M \underline{\eta} = K \underline{\eta} \quad (33)$$

여기서 M 과 K 는 대칭 정방행렬들로 그 요소들은 다음과 같이 표시된다.

$$M = \begin{bmatrix} \overline{M}^{22} & 0 \\ 0 & \overline{M}^{33} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$K = \begin{bmatrix} \overline{K}^{22} & \overline{K}^{23} \\ \overline{K}^{32} & \overline{K}^{33} \end{bmatrix} \quad (35)$$

여기서

$$\begin{aligned} \overline{K}^{22} &= [\overline{K}^{B2} + \gamma^2 \{(c_{23}c_{32} - c_{22}c_{33})\delta \overline{K}^{GA2} \\ & - (c_{32}^2 + c_{33}^2)\overline{K}^{GB2} - c_{33}^2 \overline{M}^{22}\}] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\overline{K}^{23} = [\overline{K}^{B23} + c_{32}c_{33}\gamma^2 \overline{M}^{23}] \quad (37)$$

$$\bar{K}^{32} = [\bar{K}^{B32} + c_{32}c_{33}\gamma^2\bar{M}^{32}] \quad (38)$$

$$\bar{K}^{33} = [\bar{K}^{B3} + \gamma^2\{(c_{23}c_{32} - c_{22}c_{33})\delta\bar{K}^{GA3} - (c_{32}^2 + c_{33}^2)\bar{K}^{GB3} - c_{32}^2\bar{M}^{33}\}] \quad (39)$$

3. 수치 해석 결과

3.1 제안한 방법의 검증

이 장에서는 앞에서 유도된 무차원 진동 방정식을 사용하여 수치 해석을 수행하였다. 수치 해석을 위해 굽힘방향 변위의 가상모드(assumed modes)들로 정지된 블레이드의 굽힘 진동모드들을 사용하였으며 10 개의 모드를 이용하였다.

Table 2 는 본 연구에서 구해진 수치 해석 결과들의 정확성과 신뢰성을 검증하기 위해 우선 자세각과 회전운동이 없으며 균일한 단면을 가진 경우에 대해

Table 2 Comparison of the lowest four natural frequencies ($\gamma = 0.0, \kappa = 0.25$)

		1st.	2nd.
$\gamma = 0.0000$	Ref.(13)	0.1766	1.0001
	Present	0.1764	0.9825
$\gamma = 0.0882$	Ref.(13)	0.2217	1.0273
	Present	0.2200	1.0203
$\gamma = 0.1763$	Ref.(13)	0.3166	1.1321
	Present	0.3157	1.1253
$\gamma = 0.2645$	Ref.(13)	0.4277	1.2852
	Present	0.4288	1.2796

Table 3 Comparison of the lowest two natural frequencies ($\theta_0 = 30^\circ, \delta = 2/3, \kappa = 1/400$)

		θ_0	Present	Ref.(10)	Ref.(11)
1st.		30°	1.7623	1.7623	1.7620
		60°	1.7748	1.7737	1.7742
		90°	1.7950	1.7948	1.7949
2nd.		30°	3.4793	3.4788	3.4787
		60°	3.3800	3.3790	3.3790
		90°	3.2429	3.2422	3.2426
3rd.		30°	11.1696	11.1681	11.1698
		60°	11.6055	11.6025	11.6064
		90°	12.2666	12.2631	12.2611
4th.		30°	21.4500	21.4451	21.4568
		30°	20.1611	20.1497	20.1769
		30°	18.7445	18.7246	18.7661

서 기존의 결과들(참고문헌 (10), (11)) 과 비교하였다. 이 결과들은 가장 낮은 4 개의 고유 진동수를 비교하였고 서로 오차가 최대 약 0.1% 정도 이내에서 일치하고 있으므로 동등한 결과라고 할 수 있다. Table 3 은 블레이드가 회전하는 경우에 평판이론에 의한 기존의 결과(참고문헌 (12))와 본 연구의 결과를 서로 비교하고 있다. 두 결과는 가장 낮은 2 개의 고유 진동수를 각각 비교하였고 서로 최대 오차가 약 1.5% 정도 범위에서 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 이상의 결과 비교는 본 연구에서 제시된 모델링을 검증하고 신뢰성을 보여준다고 판단된다.

3.2 초기 비틀림각에 따른 테이퍼진 블레이드의 동적 특성변화

Fig. 4 ~ 7 은 회전 각속도의 증가시킬 때 테이퍼진 단면을 가진 블레이드의 고유 진동수 변화를 나타내고 있다. Fig. 4, 5 와 6 은 블레이드의 초기 비틀림각이 없을 때 무차원 회전 각속도의 증가에 따른 가장 낮은 4 개의 고유 진동수 궤적을 보여주고 있다. 비틀림이 없는 경우 면내방향과 면외방향 굽힘 진동 방정식은 서로 연성되지 않으므로 서로 영향을 주지 않으며 두 고유 진동수 궤적은 Fig. 4~6 에서

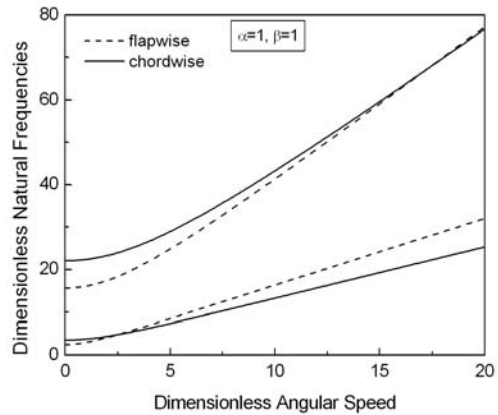


Fig. 4 Intersection of the four lowest natural frequencies ($\theta_0 = 0^\circ, \delta = 1, \kappa = 0.5$)

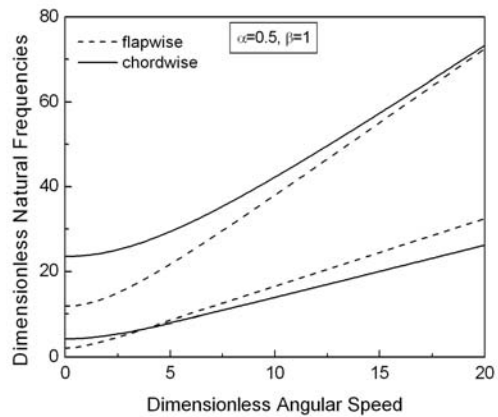


Fig. 5 Intersection of the four lowest natural frequencies ($\theta_0 = 0^\circ, \delta = 1, \kappa = 0.5$)

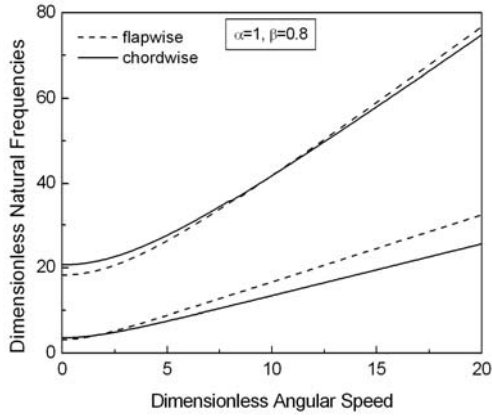


Fig. 6 Intersection of the four lowest natural frequencies ($\theta_0 = 0^\circ, \delta = 1, \kappa = 0.5$)

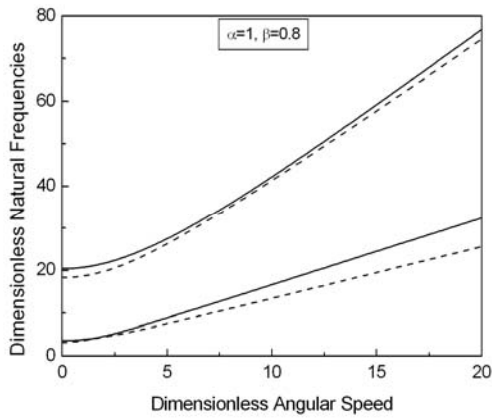


Fig. 7 Veering phenomena occurred with a non-zero pre-twist angle ($\theta_0 = 45^\circ, \delta = 1, \kappa = 0.5$)

보는 것과 같이 일정한 점에서 교차한다. Fig. 5에서와 같이 블레이드의 단면형상을 결정하는 요소인 폭의 비(α)가 작아지게 되면 면내방향과 면외방향의 고유 진동수 궤적이 보다 완만하게 증가하고 있고 특히 면외방향 고유 진동수가 본래보다 크게 감소하여 두 궤적이 교차하는 점도 테이퍼지지 않았을 때보다 높은 회전 각속도에서 나타나고 있다. Fig. 6의 두께 비(β)는 작아질수록 특히 면외방향의 고유 진동수가 증가하여 면내방향의 고유 진동수에 가까워지고 있는 것을 알 수 있다. 이는 폭의 비와 두께 비의 변화가 면외방향 고유 진동수의 변화에 더 민감하게 작용하고 있다고 할 수 있다. Fig. 7은 블레이드의 초기 비틀림이 있을 때($\theta_0 = 45^\circ$)에 고유 진동수 궤적을 보여 주고 있다. 비틀림이 없을 때는 굽힘 진동 방정식이 연성되지 않으므로 서로 영향을 주지 않고 일정한 점에서 교차했다. 하지만 초기 비틀림이 있는 경우에는 $\kappa \neq 1$ 이면 두 굽힘 진동 방정식이 서로 연성되어 영향을 주게 되고 Fig. 7에서 관찰할 수 있듯이 두 궤적은 일정거리까지 접근했다가 서로 교차하지 않고 다시 멀어지는 현상이 발생한다. 이러한 현상을 veering 현상 (참고문헌 (13))

이라 부른다.

3.3 장착각에 따른 테이퍼진 블레이드의 동적 특성변화

Fig. 8~10은 장착각 (θ_1)이 주어졌을 때 무차원 회전 각속도에 따른 블레이드의 무차원 고유 진동수 궤적을 보여준다. Fig. 4와 8를 비교하면 블레이드의 비틀림이 없을 때 장착각이 존재하면 면내방향과 면외방향 고유 진동수 궤적이 서로 교차하지 않고 서로 가까워지다 멀어지는 veering 현상이 나타남을 알 수 있다. 이는 블레이드의 굽힘 진동 방정식 (29)와 (30)에서 보듯이 비틀림각이 없더라도 장착각으로 인해 서로 연성되는 항이 존재하기 때문이다. Fig. 9는 주관성 면적 모멘트의 비(κ)를 변화시켰을 때 블레이드의 고유 진동수 변화를 보여주고 있다. Fig. 8과 9를 비교하면 $\kappa < 1$ 인 조건하에서 κ 값이 작아질 때 veering 현상이 완만하게 나타난다. κ 값이 작아지는 것은 블레이드의 모양이 폭 방향으로 더 얇아지는 형상을 띠게 된다. 이러한 블레이드의 형상이 고유 진동수의 변화에 밀접하게 영향을 끼친다는 것은 당연하다. 특히 면외방향의 고유 진동수가

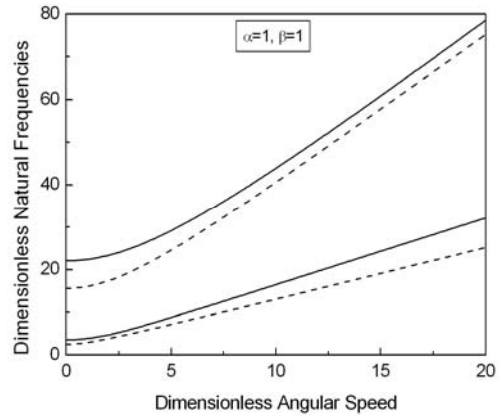


Fig. 8 Variation of natural Frequency versus angular speed

$$(\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 45^\circ, \delta = 1, \kappa = 0.5)$$

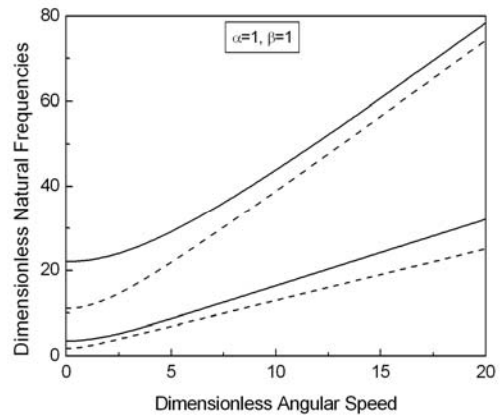


Fig. 9 Variation of natural Frequency versus angular speed

$$(\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 45^\circ, \delta = 1, \kappa = 0.25)$$

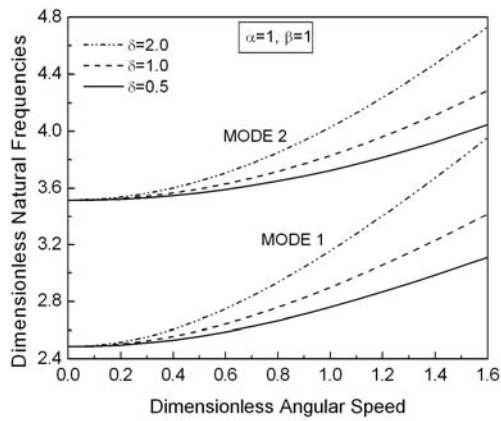


Fig. 10 Variation of natural Frequency versus angular speed

$$(\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 45^\circ, \kappa = 0.5)$$

면내방향의 고유 진동수보다 더 많은 영향을 받게 되고 κ 값이 작아질수록 면외방향의 고유 진동수는 낮아지게 된다. Fig. 10 은 축 반경 비(δ)의 변화에 따른 회전 블레이드의 동적 특성변화를 나타낸다. 그림에서 보는 바와 같이 δ 값이 증가할수록 회전 각속도의 증가에 따른 고유 진동수의 증가율을 가속시키고 있다. 축 반경 비가 증가함에 따라 고유 진동수가 증가하는 현상은 일반적으로 잘 알려진 사실이다.

4. 결 론

단면 테이퍼, 초기 비틀림각 그리고 장착각의 영향을 고려한 회전 블레이드의 진동특성을 예측하기 위해 진동 방정식을 유도하였으며 이를 이용하여 해석 결과를 도출하였다. 수치해석 결과는 회전 각속도, 초기 비틀림각, 단면 테이퍼비, 장착각, 축 반경 비등의 변화에 따른 고유 진동수의 변화를 보여 주었는데 기존의 수치해석 결과와 비교함으로써 본 연구에서 제시된 방법의 신뢰성과 정확성을 검증할 수 있었다. 본 논문에서는 초기 비틀림각의 영향에 따라 고유 진동수 궤적이 서로 교차하지 않고 서로 빗겨가는 **veering** 현상을 보여줄 뿐만 아니라 단면 테이퍼비와 장착각의 영향에 따라 **veering** 현상이 완만하게 혹은 급격하게 나타나는 것을 보여 주었다. 또한 주관성 면적 모멘트의 비와 축 반경 비의 변화가 고유 진동수의 변화에 영향을 미치는 것도 확인하였다.

후 기

이 논문은 2009 년도 2 단계 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, " The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades." British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, " Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam" J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, " Natural Frequencies of Radial Rotating Beams" J. Sound and Vibration, 56, pp. 175~185.
- (4) Buffinton, K. and Kane, T., 1985, " Dynamics of a Beam Moving Over Supports" , International Journal of Solids and Structures, Vol. 21, pp. 617~643.
- (5) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, " Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base" , Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 10, pp. 139~151.
- (6) Lai, S., 1994, " Nonlinear Finite Element modeling of a High Speed Rotating Timoshenko Beam Structure" , International Journal of Mechanical Science, Vol. 36, pp. 849~861.
- (7) Lee, S. Y. and Kuo, Y. H., 1991, " Elastic Stability of Non-uniform Columns" , Journal of Sound and Vibration, Vol. 148, pp. 11~24.
- (8) Rossi, R. E, Laura, P. A, and Gutierrez, R. H., 1990, " A Note on Transverse Vibrations of a Timoshenko Beam of Non-uniform Thickness Clamped at One End and Carrying a Concentrated Mass at the Other" , Journal of Sound and Vibration, Vol. 143, pp. 491~502.
- (9) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, " Dynamics of flexible Beams Undergoing Over-all Motions" , Journal of Sound and Vibration, Vol. 181(2), pp. 261~278.
- (10) Carnegie, W. and Thomas, J., 1972, " The coupled bending-bending vibration of pre-twisted tapered blading" , Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, pp. 255~266.
- (11) Dokumaci, E., Thomas, J. and Carnegie, W., 1967, " Matrix displacement analysis of coupled bending-bending vibrations of pre-twisted blading" , Journal of mech. Eng. Sci, Vol. 9, pp. 247~251.
- (12) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, " Natural frequencies of twisted rotating plates" , Journal of Sound and Vibration, Vol. 97, pp. 429~449.
- (13) Leissa, A., 1974, " On a curve veering aberration" , Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Vol. 25, pp. 99~111.