한국소음진동공학회 2009년 춘계학술대회논문집, pp.266~271

한 개의 크랙을 가진 회전하는 패킷 블레이드 시스템의 진동해석
Modal Analysis of a Rotating Packet Blade System having a crack

권승민* · 유홍희†
Seung Min Kwon and Hong Hee Yoo

Key Words : Modal Analysis(고유진동 해석), multi-packet blade system(다중 패킷 블레이드 계), Open Crack(개구형 크랙), Stress Intensity Factor(응력집중계수), Natural Frequency(고유진동수), Shroud(쉬라우드), Disc(디스크), Coupling stiffness effect(연성강성효과), Cantilever beam(외팔보)

Abstract

A modeling method for the modal analysis of a multi-packet blade system having a crack undergoing rotational motion is presented in this paper. Each blade is assumed as a slender cantilever beam. The stiffness coupling effects between blades due to the flexibilities of the disc and the shroud are modeled with discrete springs. Hybrid deformation variables are employed to derive the equations of motion. The flexibility due to crack, which is assumed to be open during the vibration, is calculated basing on a fracture mechanics theory. To obtain more general information, the equations of motion are transformed into dimensionless forms in which dimensionless parameters are identified. The effects of the dimensionless parameters related to the angular speed, the depth and location of a crack on the modal characteristics of the system are investigated with some numerical examples.

1. 서 론

회전하는 주기적 순환 구조물의 형태를 가진 공학적 예제는 터빈 블레이드, 항공기 회전익, 터보엔진의 팬등이 있다. 이러한 순환 구조물들은 기준 축을 중심으로 외팔보 형태의 블레이드들로 구성되어 있으며 기준 축 혹은 측판의 강성으로 인하여 블레이드에 영향을 미치게 된다. 이 중 터빈 블레이드나 항공기 회전익과 같이 회전하는 외팔보 형태의 구조물의 경우 결함에 따라 진동특성이 변화하게 된다. 이것은 보가 크랙과 같은 결함을 가질 경우 크랙이 존재하는 위치에서 추가적으로 발생하는 변형에너지에 의한 영향 때문이다. 이는 크랙이 없는 단일 블레이드의 동적 특성과 달라지며 블레이드간의 연성효과와 크랙으로 인해 고유진동특성의 변화로 연계된다. 따라서 이러한 순환 구조 시스템의 적절한 설계를 위해선 그 동적 특성을 정확히 예측할 수 있는 해석방법이 요구된다.

회전외팔보의 굽힘진동 해석 방법은 Southwell 과 Gough[(1)]가 Rayleigh Energy 평형이론에 근거하여 보의 회전에 따른 고유진동수의 변화를 예측하는 방법을 발표한 이래로 많은 연구가 수행 되어왔다. 그 후 Schilhansl[(2)]은 회전 외팔보의 굽힘진동 방정식을 유도하고 이에 Ritz 방법을 적용하여 Southwell 등이 제시한 고유진동수 예측을 위한 방정식의 계수들을 더 정확하게 구하는 방법을 제시하였다. 한편 크랙을 가진 구조물의 동적 응답에 관한 연구는 Bock[(6)]에 의한 콘크리트 구조 요소의 굽힘 변형에 대해 시작되어 수많은 연구자들에 의해서 수행 되어 오고 있다. 그 중에서도 크랙을 가지는 보 형태의 구조물의 해석은 Euler - Bernoulli 및 Timoshenko 보 이론을 중심으로 적용되어 크랙이 전체 구조물 동특성에 미치는 영향에 대한 연구가 주로 이루어져 왔다. 특히 Shen[(7)]등은 하나의 크랙에 의한 고유진동수의 변화를 예측하였고, Chati[(8)]등은 진동 시 크랙의 개폐현상에 의한 비선형 효과의 영향을 제시하였다. 또한 Chondros[(9)]등은 크랙을 가지는 보의 연속체 이론을 제시하고 그에 따른 여러 형태의 보에 관한 진동해석을 수행하였다. 최근 Yoon[(11)]등은 크랙이 존재하는 경우 회전 외팔보의 동적특성에 관한 영향을 연구하였다.

본 논문에서는 블레이드를 외팔보로, 디스크 혹은 측판의 연성효과를 스프링으로 가정하였으며 외팔보에 존재하는 크랙의 깊이와 위치를 고려한 패킷 블레이드 시스템의 운동방정식을 유도하였다. 본 연구는 참고문헌 (5)에 제시된 굽힘진동 해석에 관한 모델링을 토대로 크랙의 깊이와 위치변화에 의한 패킷 블레이드 시스템의 진동특성 변화를 조사하였다는 점에 그 고유성을 갖는다.

† 교신저자 ; 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
TEL : (02)2220-0446, Fax : (02)2293-5070
* 정회원, 한양대학교 기계공학과

2. 크랙에 의한 탄성에너지

Fig. 1 은 크랙이 존재하는 빔과 그 단면의 형상이다. 여기서 w 와 h 는 사각단면의 너비와 높이를, d 는 개구형 크랙의 깊이를 나타낸다. 1 차 파괴모드를 고려할 경우, 개구형 크랙에 가해지는 축 방향과 굽힘 방향 하중으로 인한 탄성 에너지는 다음과 같다.

$$U_c = \int_A \frac{1-\nu^2}{E}(\sigma_P + \sigma_M)^2 \, dA \qquad (1)$$

여기서 E 와 ν 는 보의 영률과 프아송비를 나타낸다. 식 (1)의 σ_P 와 σ_M 은 각각 축방향 힘 P 와 굽힘 모멘트 M 에 의한 응력집중계수를 의미하며, 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다(8~10).

$$\sigma_P = \frac{P}{wh}\sqrt{\pi y}F_1(y), \;\; \sigma_M = \frac{6M}{wh^2}\sqrt{\pi y}F_2(y) \qquad (2)$$

여기서 $F_1(y)$ 과 $F_2(y)$ 는 다음과 같다.

$$F_1(y) = \sqrt{\frac{2\tan\frac{\pi y}{2}}{\pi y}}\left[\frac{0.752 + 2.02y + 0.37(1-\sin\frac{\pi y}{2})^3}{\cos\frac{\pi y}{2}}\right] \qquad (3)$$

$$F_2(y) = \frac{1.99 - y(1-y)(2.15 - 3.39y + 2.7y^2)}{\sqrt{\pi}(1+2y)(1-y)^{3/2}} \qquad (4)$$

Castiglian 의 정리에 의하면 크랙에 의한 유연행렬은 다음과 같다.

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U_c}{\partial P_i \partial P_j} \quad (i, \; j = 1, \, 2) \qquad (5)$$

이상의 식을 종합하면 유연행렬의 요소 c_{ij} 는 다음과 같이 구할 수 있다.

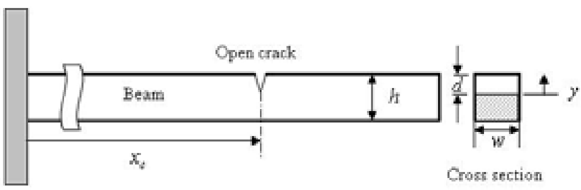

Fig. 1 Geometry of a cracked beam and its cross section

$$c_{11} = \frac{2\pi h(1-\nu^2)}{EA}\int_0^{\kappa} \xi F_1^2(\xi)d\xi \qquad (6)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\pi h^2(1-\nu^2)}{EI}\int_0^{\kappa} \xi F_1(\xi)F_2(\xi)d\xi \qquad (7)$$

$$c_{22} = \frac{6\pi h(1-\nu^2)}{EI}\int_0^{\kappa} \xi F_2^2(\xi)d\xi \qquad (8)$$

크랙에 의한 강성행렬은 계산된 유연행렬로부터 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} \qquad (9)$$

따라서 크랙에 의한 탄성에너지는 다음과 같다.

$$U_c = \frac{1}{2}\{\Delta u \quad \Delta\theta\}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

크랙의 위치를 기준으로 하여 Δu 는 양쪽 부위에서 발생하는 축방향 변위차를 나타내고 $\Delta\theta$ 는 양쪽 부위의 경사차를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^{\mu_1}\phi_{1i}^{<2>}(x_c)q_{1i}(t) - \sum_{i=1}^{\mu_1}\phi_{1i}^{<1>}(x_c)q_{1i}(t) \\ \Delta\theta &= \sum_{i=1}^{\mu_2}\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c)q_{2i}(t) - \sum_{i=1}^{\mu_1}\phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)q_{2i}(t) \end{aligned} \qquad (11)$$

3. 운동방정식 유도

3.1 크랙 빔의 운동방정식

Fig.2 는 각속도 Ω 로 평면 회전 운동하는 강체 허브에 지지되어 있는 외팔보 이다. 여기서 L 은 보의 길이, x 는 보의 고정점 O 로부터 변형 전 임의의 점 P_0 까지의 거리, x_c 는 크랙의 위치를 나타낸다. 외팔보 위의 임의 질점의 변형 후 위치인 P 점의 탄성변위는 복합 변형변수 s 와 굽힘방향 변형변수 u_2 로 나타낼 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu_1}\phi_{1i}(x)q_{1i}(t) \qquad (12)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \tag{13}$$

여기서 $\phi_{1i}(x)$ 와 $\phi_{2i}(x)$ 는 각각 인장방향과 굽힘방향의 모드함수를 나타낸다. $q_{1i}(t)$ 과 $q_{2i}(t)$ 는 일반좌표이며 μ_1 과 μ_2 는 일반좌표의 개수를 나타낸다. 크랙이 있는 보의 경우 크랙 위치를 기준으로 두 개의 영역으로 나뉠 수 있으며 ($0 \le x \le x_c$, $x_c < x \le L$) 각 영역에서의 모드함수 $\phi_{1i}^{<1>}(x)$, $\phi_{2i}^{<1>}(x)$, $\phi_{1i}^{<2>}(x)$, $\phi_{2i}^{<2>}(x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_{1i}^{<1>}(x) = A_1 \cos(\sigma_i x) + A_2 \sin(\sigma_i x) \tag{14}$$

$$\phi_{2i}^{<1>}(x) = B_1 \cos(\beta_i x) + B_2 \sin(\beta_i x) + B_3 e^{\beta_i (L-x)} + B_4 e^{\beta_i (x-L)} \tag{15}$$

$$\phi_{1i}^{<2>}(x) = A_3 \cos(\sigma_i x) + A_4 \sin(\sigma_i x) \tag{16}$$

$$\phi_{2i}^{<2>}(x) = B_5 \cos(\beta_i x) + B_6 \sin(\beta_i x) + B_7 e^{\beta_i (L-x)} + B_8 e^{\beta_i (x-L)} \tag{17}$$

여기서 $\sigma_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho}{EA}}$, $\beta_i = \sqrt{\omega_i} \sqrt[4]{\frac{\rho}{EI}}$ 이며 ω_i 는 회전이 없는 상태에서의 보의 고유진동수를 나타낸다. 크랙이 있는 보의 경계조건은 다음과 같다.

$$\phi_{1i}^{<1>}(0) = 0, \ \phi_{2i}^{<1>}(0) = 0, \ \phi_{2i,x}^{<1>}(0) = 0 \tag{18}$$

$$\phi_{2i}^{<1>}(x_c) = \phi_{2i}^{<2>}(x_c), \ \phi_{2i,xx}^{<1>}(x_c) = \phi_{2i,xx}^{<2>}(x_c)$$

$$\phi_{2i,xxx}^{<1>}(x_c) = \phi_{2i,xxx}^{<2>}(x_c), \ \phi_{1i,x}^{<1>}(x_c) = \phi_{1i,x}^{<2>}(x_c) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} & k_{11}\left(\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)\right) + \\ & k_{12}\left(\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)\right) = EA\phi_{1i,x}^{<1>}(x_c) \\ & k_{21}\left(\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)\right) + \\ & k_{22}\left(\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)\right) = EI\phi_{2i,xx}^{<1>}(x_c) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\phi_{1i,x}^{<3>}(L) = 0, \ \phi_{2i,xx}^{<3>}(L) = 0, \ \phi_{2i,xxx}^{<3>}(L) = 0 \tag{21}$$

위 식에서 하첨자에 포함된 x 는 각 하첨자에 대한 모드함수의 미분을 뜻한다. 즉 xx 는 모드함수의 2 차 미분을, xxx 는 3 차 미분을 나타낸다. 위 12 개의 식으로부터 구성된 12×12 행렬이 무의미해를 갖지 않기 위한 조건으로부터 각 모드함수의 계수인 A_i 와 B_i 가 결정될 수 있다. 이로부터 얻어진 모드함수는 모든 경계조건을 만족하는 comparison 함수이며 그 수렴속도가 매우 빠르다.

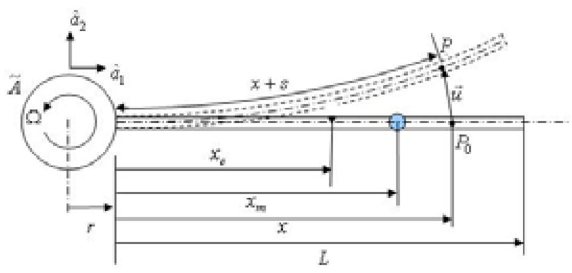

Fig.2 Configuration of a rotating cracked beam

반경이 r 인 허브가 각속도 Ω 로 회전할 경우 디스크 $\tilde{A}$ 의 각속도와 P 의 속도는 다음과 같다.

$$\vec{\omega}^{\tilde{A}} = \Omega \hat{a}_3 \tag{22}$$

$$\vec{v}^P = [\dot{u}_1 - \Omega u_2]\hat{a}_1 + [r\Omega + \dot{u}_2 + \Omega(x + u_1)]\hat{a}_2 \tag{23}$$

Kane 의 방법에 의한 운동방정식은 다음과 같다[12].

$$\int_0^L \rho\left(\frac{d\vec{v}^P}{dt}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i}\right) dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \tag{24}$$

U 는 보의 총 탄성 에너지이며 q_i 는 일반좌표를 나타낸다. 식 (23)의 편속도는 다음과 같은 관계식에 의해 $\dot{s}$ 와 $\dot{u}_2$ 로 나타내어질 수 있다.

$$\dot{s} = \dot{u}_1 + \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma}\right)\left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \sigma}\right) d\sigma \tag{25}$$

보의 총 탄성 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EA\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 dx + U_c \tag{26}$$

여기서 E 는 영의 계수, A 는 보의 단면적, I 는 보의 2 차 면적 모멘트를 나타낸다. 이상의 식들을 종합하여 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1}\left[m_{ij}^{11}\ddot{q}_{1j} - \Omega^2 m_{ij}^{11} q_{1j} + k_{ij}^{S} q_{1j}\right] - \sum_{j=1}^{\mu_2}\left[2\Omega m_{ij}^{12}\dot{q}_{2j} + \dot{\Omega} m_{ij}^{12} q_{2j}\right] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1}\left[k_{ij}^{11} q_{1j}\right] + \sum_{j=1}^{\mu_2}\left[k_{ij}^{12} q_{2j}\right] = \Omega^2 P_{1i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu_1) \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2}\left[m_{ij}^{22}\ddot{q}_{2j} + \left\{k_{ij}^{B} + \Omega^2\left(k_{ij}^{G} - m_{ij}^{22}\right)\right\} q_{2j}\right] + \sum_{j=1}^{\mu_1}\left[2\Omega m_{ij}^{21}\dot{q}_{1j} + \dot{\Omega} m_{ij}^{21} q_{1j}\right] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1}\left[k_{ij}^{21} q_{1j}\right] + \sum_{j=1}^{\mu_2}\left[k_{ij}^{22} q_{2j}\right] = -\dot{\Omega} P_{2i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu_2) \end{aligned} \tag{28}$$

여기서

$$m_{ij}^{ab} = \int_0^L \rho\phi_{ai}(x)\phi_{bj}(x)dx$$

$$k_{ij}^{S} = \int_0^L EA\phi_{1i,x}(x)\phi_{1j,x}(x)dx \qquad (29)$$

$$k_{ij}^{B} = \int_0^L EI\,\phi_{2i,xx}(x)\phi_{2j,xx}(x)dx$$

$$k_{ij}^{G} = \int_0^L \frac{\rho}{2}(2r+L+x)(L-x)\phi_{2i,x}(x)\phi_{2j,x}(x)dx$$

$$k_{ij}^{11} = k_{11}[\phi_{1i}^{<2>}(x_c)-\phi_{1i}^{<1>}(x_c)][\phi_{1j}^{<2>}(x_c)-\phi_{1j}^{<1>}(x_c)]$$

$$k_{ij}^{12} = k_{12}[\phi_{1i}^{<2>}(x_c)-\phi_{1i}^{<1>}(x_c)][\phi_{2j,x}^{<2>}(x_c)-\phi_{2j,x}^{<1>}(x_c)] \qquad (30)$$

$$k_{ij}^{21} = k_{21}[\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c)-\phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)][\phi_{1j}^{<2>}(x_c)-\phi_{1j}^{<1>}(x_c)]$$

$$k_{ij}^{22} = k_{22}[\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c)-\phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)][\phi_{2j,x}^{<2>}(x_c)-\phi_{2j,x}^{<1>}(x_c)]$$

$$P_{ai} = \int_0^L \rho(r+x)\phi_{ai}(x)dx$$

인장, 굽힘 간 연성효과를 무시하고 일정한 각속도의 회전운동을 가정하면 다음과 같은 굽힘방향 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2}\left[m_{ij}^{ab}\ddot{q}_{2j}+\left\{k_{ij}^{B}+k_{ij}^{22}+\Omega^2\left(k_{ij}^{G}-m_{ij}^{ab}\right)\right\}q_{2j}\right]=0 \qquad (31)$$

$$(i=1,2,....,\mu_2)$$

보다 일반적인 결과를 얻기 위해 운동방정식을 무차원화할 수 있다. 다음과 같은 무차원 변수 및 매개변수를 이용하여 시스템의 고유진동 해석에 사용되는 최종적인 무차원 운동방정식을 유도할 수 있다.

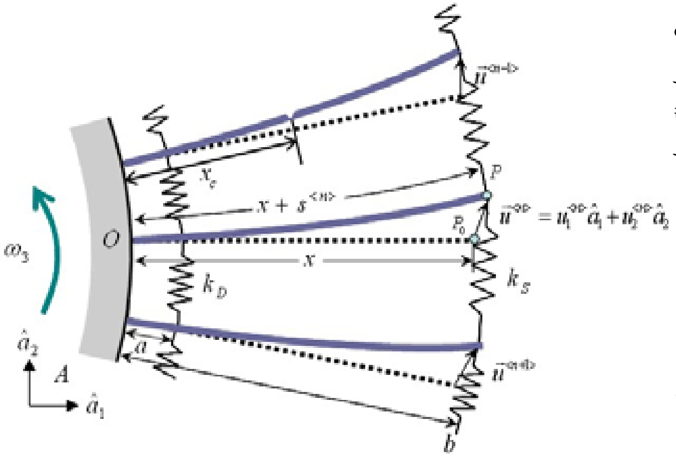

Fig.3 Configuration of blades system having a crack

$$\tau = \frac{t}{T}\,,\quad \xi = \frac{x}{L}\,,\quad \vartheta_{ai} = \frac{q_{ai}}{L} \qquad (32)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{AL^2}{I}}\,,\quad \gamma = \Omega T \qquad (33)$$

$$T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}} \qquad (34)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2}\left[\bar{m}_{ij}^{22}\ddot{\vartheta}_{2j}+\left\{\bar{k}_{ij}^{B}+\gamma^2\left(\bar{k}_{ij}^{G}-\bar{m}_{ij}^{22}\right)\right\}\vartheta_{2j}\right] + \sum_{j=1}^{\mu_2}\left[\bar{k}_{ij}^{22}\vartheta_{2j}\right]=0 \qquad (i=1,2,....,\mu_2) \qquad (35)$$

위 식에서 $\ddot{\vartheta}_{ai}$ 는 τ 에 대한 ϑ_{ai} 의 2 차 미분을 나타내며 각 행렬과 무차원 매개변수는 다음과 같다.

$$\bar{m}_{ij}^{ab} = \int_0^1 \psi_{ai}\psi_{bj}\,d\xi$$

$$\bar{k}_{ij}^{B} = \int_0^1 \psi_{2i,\xi\xi}\psi_{2j,\xi\xi}\,d\xi$$

$$\bar{k}_{ij}^{G} = \int_0^1\left[\delta(1-\xi)+(1-\xi^2)\right]\psi_{2i,\xi}\psi_{2j,\xi}\,d\xi \qquad (36)$$

$$\bar{k}_{ij}^{22} = \bar{k}_{22}[\psi_{2i,\xi}^{<2>}(\beta_c)-\psi_{2i,\xi}^{<1>}(\beta_c)][\psi_{2j,\xi}^{<2>}(\beta_c)-\psi_{2j,\xi}^{<1>}(\beta_c)]$$

$$\beta_c = \frac{x_c}{L}\,,\ \delta = \frac{r}{L}\,,\ \bar{k}_{22} = \frac{h}{EI}k_{22}$$

3.2 패킷 블레이드 시스템의 운동방정식

Fig.3 는 하나의 크랙을 갖는 패킷 블레이드 시스템의 형상이다. k_D 와 k_S 는 보 구조물 사이 디스크와 측판의 연성스프링 강성을, a 와 b 는 연성스프링의 연결된 위치를, x_c 는 크랙의 위치를 나타낸다. U 는 보의 인장 및 굽힘에 의한 탄성에너지, 연성스프링의 의한 탄성에너지,크랙에 의한 탄성에너지로 다음과 같이 표현된다.

$$U^{<n>} = \frac{1}{2}\int_0^{l_{<n>}}\left[EA\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2dx + EI\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2dx\right]+U_c$$

$$+\frac{1}{2}k_D\left[u^{<n>}(a)-u^{<n-1>}(a)\right]^2+\frac{1}{2}k_D\left[u^{<n+1>}(a)-u^{<n>}(a)\right]^2$$
$$+\frac{1}{2}k_S\left[u^{<n>}(b)-u^{<n-1>}(b)\right]^2+\frac{1}{2}k_S\left[u^{<n+1>}(b)-u^{<n>}(b)\right]^2 \qquad (37)$$

다음과 같은 무차원 변수 및 매개변수를 이용하여 시스템의 고유진동 해석에 사용되는 최종적인 무차원 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T},\ \xi \equiv \frac{x}{l},\ \theta \equiv \frac{q}{l},\ \delta \equiv \frac{r}{l},\ \alpha_D \equiv \frac{a}{l},\ \alpha_S \equiv \frac{b}{l}$$
$$T = \sqrt{\frac{\rho l^4}{EI_{zz}}},\ \gamma = \Omega T,\ \beta_D = \frac{k_D l^3}{EI_{zz}},\ \beta_S = \frac{k_S l^3}{EI_{zz}} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\mu}\Big[& M_{ij}\ddot{\theta}_j^{<n>} + \left\{K_{ij}^{B} + K_{ij}^{C} + \gamma^2\left(\delta K_{ij}^{GA} + K_{ij}^{GB} - M_{ij}\right)\right\}\theta_j^{<n>} \\ & - \beta_D\left(K_{ij}^{CD}\theta_j^{<n-1>} - 2K_{ij}^{CD}\theta_j^{<n>} + K_{ij}^{CD}\theta_j^{<n+1>}\right) \\ & - \beta_S\left(K_{ij}^{CS}\theta_j^{<n-1>} - 2K_{ij}^{CS}\theta_j^{<n>} + K_{ij}^{CS}\theta_j^{<n+1>}\right)\Big] = 0\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_0^1 \varphi_i(\xi)\varphi_j(\xi)\,d\xi \\ K_{ij}^{B} &= \int_0^1 \varphi_{i,\xi\xi}(\xi)\varphi_{j,\xi\xi}(\xi)\,d\xi \\ K_{ij}^{GA} &= \int_0^1 (1-\xi)\varphi_{i,\xi}(\xi)\varphi_{j,\xi}(\xi)\,d\xi \\ K_{ij}^{GB} &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\xi^2)\varphi_{i,\xi}(\xi)\varphi_{j,\xi}(\xi)\,d\xi \\ K_{ij}^{CD} &= \varphi_i(\alpha_D)\varphi_j(\alpha_D) \\ K_{ij}^{CS} &= \varphi_i(\alpha_S)\varphi_j(\alpha_S) \\ K_{ij}^{C} &= \bar{k}_{22}(\phi_{2i\ ,\xi}^{<2>}(\beta_c) - \phi_{2i\ ,\xi}^{<1>}(\beta_c))(\phi_{2j\ ,\xi}^{<2>}(\beta_c) - \phi_{2j\ ,\xi}^{<1>}(\beta_c)) \end{aligned} \tag{40}$$

패킷 끝에 위치한 n 번째 블레이드의 경우 한쪽 끝은 측판강성이 없으므로 식(13)에서 $-\beta_S\left(-K_{ij}^{CS}\theta_j^{<n>} + K_{ij}^{CS}\theta_j^{<n+1>}\right)$만큼 제외하여야 한다. φ_j 는 ϕ_j 와 동일한 함수값을 가지나 ξ 의 함수이며, $\ddot{\theta}_j$ 은 θ_j 의 τ 에 관한 2 차 미분을 나타낸다.

식(13)로부터 Fig.2 와 같은 패킷 블레이드로 구성된 개방계 시스템의 진동 방정식은 다음과 같이 정리할 수 있다

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{0\} \tag{41}$$

모드 해석을 위하여 열벡터 $\{\theta\}$ 를 다음과 같이 나타낸다.

$$\{\theta\} = e^{j\lambda\tau}\{\eta\} \tag{42}$$

여기서 λ 는 고유진동수이고 $\{\eta\}$ 는 모드형상을 나타내는 모드벡터이다. 식(16)을 식(15)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\lambda^2[M]\{\eta\} = [K]\{\eta\} \tag{43}$$

이 식(17)를 이용하여 모드 해석을 수행할 수 있다.

4. 수치해석

Table 1 은 5 번째 블레이드에 크랙이 존재할 경우외팔보상 임의의 위치에 일정 크기의 크랙만 존재할 경우 크랙의 크기와 위치에 따른 첫 번째와 두 번째, 세 번째 고유진동수 값들을 비교한 것이다. 크랙의 위치가 고정단에 가깝고 크랙의 크기가 클수록 고유진동수는 더 작아지는 것을 확인할 수 있다.

Table 2 는 크랙의 깊이가 0.5, 위치가 0.25 에 위치해 있을 경우 크랙이 존재하는 블레이드 순서에 따른 첫 번째와 두 번째, 세 번째 고유진동수 값들을 비교한 것이다. 2 차의 고유진동수가 다른 고유진동수 들에 비해서 많은 영향을 받는 것을 알 수 있으며 패킷의 바깥쪽에 위치한 첫 번째와 여섯 번째 블레이드의 주파수 변화가 안쪽에 있는 블레이드에 비해 많이 떨어지지 않는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 블레이드 임의의 순서와 위치에 크랙이 있는 회전하는 패킷 블레이드 시스템의 굽힘진동 해석모델링이 제시되었다. 이 모델링에서 크랙에

Table 1 Comparison of the lowest three natural frequencies

β_c	κ	1st	2nd	3rd
no crack		3.5160	4.1658	4.1658
0.25	0.05	3.5158	3.7149	3.9483
	0.25	3.5208	3.7106	3.9346
	0.5	3.5209	3.5999	3.9246
0.5	0.05	3.5160	3.71448	3.9484
	0.25	3.5158	3.7127	3.9485
	0.5	3.5101	3.6763	3.9487
0.75	0.05	3.5160	3.7145	3.9484
	0.25	3.5159	3.7154	3.9483
	0.5	3.3976	3.6915	3.9442

Table 2 Comparison of the lowest three natural frequencies

	1st	2nd	3rd
no crack		3.5160	4.1658
blade #1	3.5187	3.6496	3.9246
blade #2	3.5198	3.6002	3.9245
blade #3	3.5190	3.6337	3.9245
blade #4	3.5192	3.6337	3.9245
blade #5	3.5208	3.5999	3.9245
blade #6	3.5187	3.6496	3.9245

의한 효과를 고려하기 위해 1 차 파괴모드만고려하였다. 또한 패킷 블레이드 시스템의 굽힘방향 지배방정식으로부터 유도된 일반해에 시스템의 경계조건과 연속조건을 적용하여 얻은 식의 특성방정식의 해를 구함으로써 고유진동수를 얻을 수 있었다. 해석결과 크랙의 크기와 위치, 그리고 크랙이 존재하는 블레이드의 순서에 의해 패킷 블레이드 시스템의 굽힘 방향 고유진동수에 큰 영향을 미치는 것을 확인할 수 있었다. 수치해석 예제
를 통해 크랙의 깊이가 깊어질수록, 크랙의 위치가 고정단에 가까울수록 고유진동수가 낮아지는 현상을 볼 수 있었다.

참 고 문 헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, “The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades,” British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766.

(2) Schilhansl, M., 1958, “Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam,” *J. of App. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs,* 25, pp. 28~30.

(3) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, “Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions,” *J. of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.

(4) Yoo, H., 1996, “Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams Considering Concentrated Mass Effect,” *KSME*, Vol. 20, No. 8, pp. 2516~2523.

(5) Seo, S., Huh, K. and Yoo, H., 2002, “The Effect of a Concentrated Mass on the Modal Characteristics of a Rotating Cantilever Beam,” *J. of Mechanical Engineering*, Vol. 216(2), pp. 151~163.

(6) Bock, E., 1942, “Behavior of Concrete and Reinforced Concrete Subjected to Vibrations Causing Bending,” VDIZ 86, pp. 145~147.

(7) Shen, M., Pierre, C. 1990, “Natural modes of Euler-Bernoulli Beam,” *J. of Vibration and Acoustics Stress and Reliability*, 111, pp. 81~84.

(8) Chati, M., Rand, R. and Mukherjee, S., 1997, “Modal Analysis of a Cracked Beam,” *J. of Sound and Vibration*, 207(2), pp. 249~270.

(9) Chondros, T. and Dimarogonas, A., 1998, “Vibration of a Cracked Cantilever Beam,” *J. of Vibration and Acoustics*, 120, pp. 742~746

(10) Dado, M. and Abuzeid, O., 2003, “Coupled Transverse and Axial Vibratory Behaviour of Cracked Beam with End Mass and Rotary Inertia,” *J. of Sound and Vibration*, V. 261, No. 4, pp. 675~696.

(11) Yoon, H. and Son, I., 2005, “Dynamic Behavior of Rotating Cantilever Beam with Crack,” *KSNVE*, Vol. 15, No. 5, pp. 620~628.

(12) Kane, T. and Levinson, D., 1985, “Dynamics, Theory and Applications,” McGraw-Hill Book Co.

(13) Ewalds, H. and Wnahil, R., 1984, “Fracture Mechanics,,” Edward Amold and Delftse Uitgevers Maatschappij, London.