

전자기 전달관계 이론을 이용한 회전자 축 조건별 영구자석 동기 전동기의 정특성 해석

장석명\*, 박유섭\*, 고경진\*, 박지훈\*, 이성호\*\*, 최장영\*\*\*  
 충남대학교\*, 한국생산기술연구원\*\*, 한라공조연구소\*\*\*

Static analysis on Permanent Magnet Synchronous Motors using Transfer Relation Theorem according to Shaft Materials

Seok-Myeong Jang\*, Yu-Seop Park\*, Kyoung-Jin Ko\*, Ji-Hoon Park\*, Sung-Ho Lee\*\*  
 Chungnam National University\*, KITECH\*\*, Halla Climate Control\*\*\*

**Abstract** - This paper deals with the static analysis on the permanent magnet synchronous motors(PMSM) using transfer relation theorem according to the shaft materials, and adopts the analytical method to predict the magnetic field distribution and to calculate the electrical parameters by using Transfer Relation Theorem(TRT) in terms of 2-D model in polar coordinates system. In addition, the three types of PMSMs with different types of shafts, which are *Iron cored*, *Air cored*, *Full-ring permanent magnet type shaft*, are suggested in this research, and with those models, not only the analysis on the magnetic field distribution, the estimation of electrical parameters, but also their comparison with Finite Element Analysis(FEA) is processed.

1. 서 론

고효율, 소형화, 저중량, 높은 신뢰성 등의 장점을 가진 고속 영구자석 동기 전동기는 다양한 시스템으로의 적용에 있어서 그 관심이 매우 높아지고 있다[1].

현재 고속 영구자석 동기 전동기의 설계와 해석에 있어서 자계분포를 예측하기 위한 다양한 기법들이 적용되고 있다. 유한요소법 같은 수치해석법은 물리적으로 연속적인 현상을 갖는 계반의 형상을 편미분 방정식으로 표현하여 유한개의 이산치 값을 구하는 방법으로 치환하여 푸는 방법이다. 이러한 수치해석법은 최근 컴퓨터의 급속한 발달에 따라 계산시간이 무척 빨라져, 많은 분야의 전기기기 연구 및 복잡한 기하학적 형상의 정밀 해석에 적용되고 있다. 전자기 이론에 의한 해석적 기법은 변수분리법이나 푸리에 급수에 기반을 둔 공간고조파법 등이 이용되고 있는데, 이들은 초기 설계 시 설계 변수에 따른 기기의 특성을 분석하는데 매우 빠르고 정확하게 적용될 수 있다는 장점이 있다. 특히 Melcher가 제안한 전달관계이론은 지배방정식의 도출과 같은 해석적인 부담을 줄여준다는 점에서 이전의 공간고조파법 보다 더 유용하다[2][3].

본 논문은 2차원 모델에서 자계 분포를 예측하고 영구자석 동기전동기의 회로정수를 계산하기 위해 해석적인 방법인 전달관계이론을 도입하고, 자기회로조건에 따른 특성 비교를 위해 그림 1에서 축이 *Iron cored*, *Air cored*, *Full-ring permanent magnet type shaft*인 세 가지 영구자석 동기전동기 모델을 제시한다. 세 가지 모델에 대해서 자계 분포 해석, 회로정수 측정뿐만 아니라 유한요소법을 통한 해석결과와의 비교분석이 수행되고 그 결과들이 일치됨을 보임으로서 제안된 전달관계이론의 타당성이 검증될 것이다.

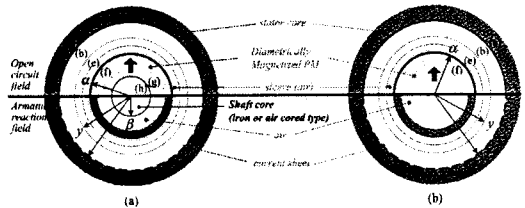


그림 1. 축 재질을 고려한 해석 모델 (a) Iron 또는 Air cored type shaft인 경우, (b) Full-ring permanent magnet type shaft인 경우

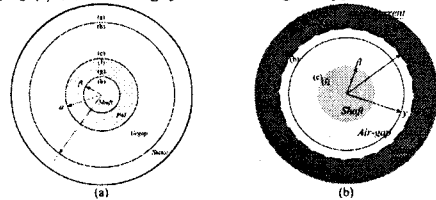


그림 2. (a) 회전자 영구자석에 의한 자계분포 해석 모델, (b) 고정자 권선에 의한 자계분포 해석 모델

2. 회전자 축 조건별 영구자석 동기 전동기의 정특성 해석

정특성 해석에 앞서 그림 2는 회전자 영구자석에 의한 자계분포와 고정자 권선에 의한 자계분포 해석 모델을 보여주고 있으며, 전류는 고정자 내반경  $\gamma$  인 곳에 면전류로 분포한다고 가정한다.

2.1 회전자 영구자석에 의한 자계분포 해석

그림 2(a)에 대한 지배 방정식은 식(1)과 같이 주어지고, 경계면 (f)와 (g)에서의 전달관계행렬은 식(2), 경계면 (b)와 (e)에서의 전달관계행렬은 식(3)과 같이 주어진다[4].

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} A_{zn} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} A_{zn} - \left( \frac{1}{r} \right)^2 A_{zn} \right] = - \frac{j}{r} \mu_0 M_n \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} B_{fn}^f \\ B_{gn}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_o(\beta, \alpha) G_o(\alpha, \beta) \\ G_o(\beta, \alpha) F_o(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{zn}^f \\ A_{zn}^g \end{bmatrix} + M_s \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} B_{bn}^b \\ B_{en}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_o(\alpha, \gamma) G_o(\gamma, \alpha) \\ G_o(\alpha, \gamma) F_o(\gamma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{zn}^b \\ A_{zn}^e \end{bmatrix} \quad (3)$$

표 1에서는 영구자석에 의한 자계분포 해석을 위한 각 모델별 경계조건이 제시되어 있다. 이 경계조건들과 전달관계이론을 사용하여 모델들에 대한 경계면 (e)에서의 자기벡터자위가 식(4), (5), (6)과 같이 계산되어진다. 축 재질에 따라서 식(4)는 *Iron cored*, 식(5)는 *Air cored*, 식(6)은 *Full-ring permanent magnet type shaft* 인 경우의 자기벡터자위를 나타낸다.

표 1. 영구자석에 의한 자계분포 해석을 위한 각 모델별 경계조건

모델	경계조건	
Iron cored type shaft	$B_{\theta n}^b = 0$ $B_{\theta n}^g = \mu_o M_{\theta n}$	$B_{\theta n}^e = B_{\theta n}^f - \mu_o M_{\theta n}$ $A_{zn}^e = A_{zn}^f$
Air cored type shaft	$B_{\theta n}^b = 0$ $B_{\theta n}^g - B_{\theta n}^h = \mu_o M_{\theta n}$ $B_{\theta n}^e = B_{\theta n}^f - \mu_o M_{\theta n}$	$A_{zn}^e = A_{zn}^f$ $A_{zn}^h = A_{zn}^g$ $A_{zn}^{zero} = 0$
Full-ring PM type shaft	Iron cored typed 과 동일하지만 $\beta = 0$	

$$A_{zn}^{e \text{ iron}} = \frac{M_s \left( -\frac{G_o(\alpha, \beta)}{F_o(\alpha, \beta)} Y_s + X_s \right) + \frac{G_o(\alpha, \beta)}{F_o(\alpha, \beta)} \mu_o M_{\theta n} - \mu_o M_{\theta n}}{\frac{G_o(\alpha, \beta) G_o(\beta, \alpha)}{F_o(\alpha, \beta)} - \frac{G_o(\alpha, \gamma) G_o(\gamma, \alpha)}{F_o(\alpha, \gamma)} + F_o(\gamma, \alpha) - F_o(\beta, \alpha)} \quad (4)$$

$$A_{zn}^{e \text{ air}} = \frac{M_s X_s - \mu_o M_{\theta n}}{F_o(\beta, \alpha) A_{zn}^e + \frac{G_o(\alpha, \gamma) G_o(\gamma, \alpha)}{F_o(\alpha, \gamma)} - F_o(\gamma, \alpha)} \quad (5)$$

$$A_{zn}^{e \text{ full}} = \frac{M_s \left( -\frac{G_o(\alpha, 0)}{F_o(\alpha, 0)} Y_s + X_s \right) + \frac{G_o(\alpha, 0)}{F_o(\alpha, 0)} \mu_o M_{\theta n} - \mu_o M_{\theta n}}{\frac{G_o(\alpha, 0) G_o(0, \alpha)}{F_o(\alpha, 0)} - \frac{G_o(\alpha, \gamma) G_o(\gamma, \alpha)}{F_o(\alpha, \gamma)} + F_o(\gamma, \alpha) - F_o(0, \alpha)} \quad (6)$$

또한, 각각의 자기벡터자위는 표 2에 대입되어 경계면 (e)에서의 원주방향 자속밀도, 공극 임의의 경계면 (Y)에서의 자기벡터자위, 반경방향 자속밀도, 원주방향 자속밀도를 계산하기 위해 사용된다.

그림 3은 제안된 전달관계이론과 유한요소해석법을 통한 해석 비교 결과를 보여준다. 해석결과와 일치성이 제안된 전달관계이론의 타당성을 증명하고 있다.

### 2.2 고정자 권선에 의한 자계분포 해석

그림 2(b)는 고정자 권선에 의한 자계분포 해석을 위한 모델이다. 영구자석에 의한 자계분포 해석시와 유사한 과정을 통해 이 모델에 대한 지배 방정식은 식(7)과 같이 주어지고, 경계면 (e)와 (b)에서의 전달관계행렬은 식(8), 경계면 (e)와 원점에서의 전달관계행렬은 식(9)과 같이 주어진다[4].

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} A_{zn} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} A_{zn} - \left( \frac{1}{r} \right)^2 A_{zn} \right] = 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} B_{\theta n}^e \\ B_{\theta n}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_o(\gamma, \beta) G_o(\beta, \gamma) \\ G_o(\gamma, \beta) F_o(\beta, \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{zn}^e \\ A_{zn}^b \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} B_{\theta n}^e \\ B_{\theta n}^{zero} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_o(0, \beta) G_o(\beta, 0) \\ G_o(0, \beta) F_o(\beta, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{zn}^e \\ A_{zn}^{zero} \end{bmatrix} \quad (9)$$

고정자 권선에 의한 자계분포 해석을 위한 각 모델별 경계조건은 표 3과 같다. 영구자석에 의한 자계분포 해석시와 동일한 방법으로 경계조건들과 전달관계이론을 사용하여 세 가지 모델에 대한 경계면 (e)에서의 자기벡터자위가 식 (10), (11), (12)와 같이 계산되어지고 표 2를 다시 사용하면 경계면 (e)에서의 원주방향 자속밀도, 공극 임의의 경계면 (Y)에서의 자기벡터자위, 반경방향 자속밀도, 원주방향 자속밀도를 계산할 수 있다. 축 제질에 따라서 식(10)은 Iron cored, 식(11)은 Air cored, 식(12)는 Full-ring permanent magnet type shaft의 자기벡터자위를 나타낸다.

$$A_{zn}^{e \text{ iron}} = -\frac{F_o(\beta, \gamma)}{G_o(\gamma, \beta)} A_{zn}^b + \frac{\mu_o J}{G_o(\gamma, \beta)} \quad (10)$$

$$A_{zn}^{e \text{ air}} = \frac{\frac{\mu_o J F_o(\gamma, \beta)}{G_o(\beta, \gamma) G_o(\gamma, \beta) - F_o(\gamma, \beta) F_o(\beta, \gamma)}}{F_o(0, \beta) G_o(\gamma, \beta) - \frac{F_o(\gamma, \beta) F_o(\beta, \gamma)}{G_o(\beta, \gamma)} + \frac{F_o(\gamma, \beta) - F_o(0, \beta)}{G_o(\beta, \gamma)}} \quad (11)$$

표 2. 공극 임의의 경계면 (Y)에서의 특성식

모델	특성식
경계면(e)에서의 원주방향 자속밀도	$B_{\theta n}^b = \left[ -\frac{G_o(\alpha, \gamma) G_o(\gamma, \alpha)}{F_o(\alpha, \gamma)} + F_o(\gamma, \alpha) \right] A_{zn}^e$
자기벡터자위	$A_{zn}^Y = \frac{B_{\theta n}^e - F_o(Y, \alpha) A_{zn}^e}{G_o(\alpha, Y)}$
반경방향 자속밀도	$B_{r n}^Y = -\frac{j}{Y} A_{zn}^Y e^{-\beta}$
원주방향 자속밀도	$B_{\theta n}^Y = F_o(\alpha, Y) A_{zn}^Y + G_o(Y, \alpha) A_{zn}^e$

표 3. 고정자 권선에 의한 자계분포 해석을 위한 각 모델별 경계조건

종류	경계조건	
Iron cored type shaft	$B_{\theta n}^b = \mu_o J$	$B_{\theta n}^e = 0$
Air cored type shaft	$B_{\theta n}^b = -\mu_o J$ $B_{\theta n}^e = B_{\theta n}^f$	$A_{zn}^e = A_{zn}^f$ $A_{zn}^{zero} = 0$
Full-ring PM type shaft	Iron cored typed 과 동일하지만 $\beta = 0$	

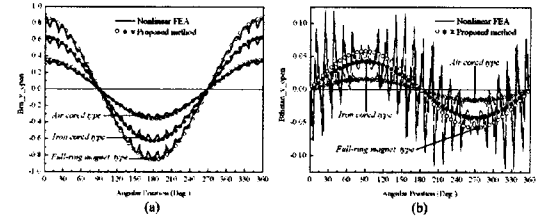


그림 3. 전달관계이론과 유한요소법을 통한 해석 결과 비교 : 경계면 (Y)에서의 (a) 반경방향 자속밀도, (b) 원주방향 자속밀도

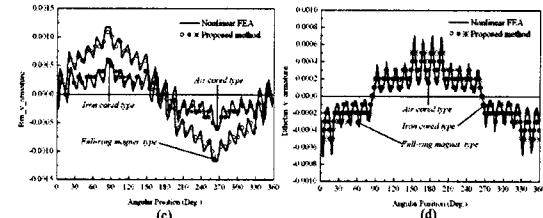


그림 4. 전달관계이론과 유한요소법을 통한 해석 결과 비교 : 경계면 (Y)에서의 (a) 반경방향 자속밀도, (b) 원주방향 자속밀도

$$A_{zn}^{e \text{ full}} = -\frac{F_o(0, \gamma)}{G_o(\gamma, 0)} A_{zn}^b + \frac{\mu_o J}{G_o(\gamma, 0)} \quad (12)$$

제안된 전달관계이론과 유한요소법을 통한 해석 비교 결과는 그림 4에 나타나 있다. 해석결과가 일치하는 것으로 제안된 전달관계이론의 타당성이 증명된다. 반경방향 자속밀도에 대해서 축이 Full-ring permanent magnet type shaft인 경우 가장 큰 값을 가지고 있고, Iron cored, Air cored type shaft인 경우에는 고정자 권선에 의한 자계분포 해석시 사실상 동일모델로 간주되어지므로 같은 크기의 자속밀도를 가지고 있는 것을 확인할 수 있다. 반면 원주방향 자속밀도는 세 가지 모델이 동일한 크기를 가지고 있음을 확인할 수 있다.

### 3. 회로정수 도출

#### 3.1 역기전력 상수 해석

제시된 모델에 대한 역기전력 및 역기전력 상수는 식 (13), (14)을 통해 계산되어진다[5].

$$V_{emf} = -d\lambda_f/dt = -j\omega_n N_{app} N_s \Phi \quad (13)$$

$$K_E = \max(V_{emf}/\omega_n) \quad (14)$$

그림 5는 각 모델에 대한 역기전력과 역기전력 상수에 대해 전달관계이론과 유한요소법을 통해 도출된 결과를 비교하고 있다. 경계면 (e)에서의 자기벡터자위각 쇄교자속에 직접적으로 영향을 미치므로 각 모델에 대한 역기전력과 역기전력 상수의 크기순이 자기벡터자위의 크기순과 동일하다.

### 3.2 인덕턴스 해석

자기 인덕턴스는 식(15)에 의해서 얻어지고, 쇄교자속은 식(16)과 같이 표현된다.

$$L_{self} = \frac{\Phi_a}{I_a} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Phi_a &= N_{ph} \int B_{ga} \cdot ds \\ &= N_{ph} R_s L_{stk} \int B_{ga} \cdot d\theta \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,  $B_{ga}$ 는 Carter 계수를 고려한 권선에 흐르는 전류에 의한 공극에서의 자속밀도로 식(17)로 다시 표현되고, Carter 계수는 식(18)과 같이 계산된다.

$$B_{ga} = B_a \cdot k_c \quad (17)$$

$$k_c = \frac{\tau_t}{\tau_t - \beta_m g'} \quad (18)$$

여기서,  $\tau_t = 2\pi r / N_s$ 는 슬롯피치이고,  $g' = g_{max} + (\alpha - \beta) / \mu_r$ 는 유효공극길이이다.  $\beta_m$ 은 식(19)와 같이 표현된다.

$$\beta_m = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{b_{so}}{2g'} \tan^{-1} \left( \frac{b_{so}}{2g'} \right) - \ln \sqrt{1 + \left( \frac{b_{so}}{2g'} \right)^2} \right] \quad (19)$$

이로부터 쇄교자속은 식(20)으로 계산되어지고, 결과적으로 자기인덕턴스와 상호인덕턴스는 식(21), (22)와 같이 도출되어진다.

$$\Phi_a = N_{ph} \frac{2\gamma K_c L_{stk} \mu_o I_a I_n}{np} \left( 1 - \cos \frac{np\pi}{2} \right) \quad (20)$$

$$L_{self} = N_{ph} \frac{2\gamma K_c L_{stk} \mu_o I_n}{np} \left( 1 - \cos \frac{np\pi}{2} \right) \quad (21)$$

$$M = -L_{self} / 2 \quad (22)$$

여기서,  $\gamma$ 은 고정자 내반경,  $I_n$ 는 1상 전류의 최대값,  $I_n$ 는 전류분포에 대한 푸리에 계수이다[5]. 각 모델에 대한 전달관계이론과 유한요소법을 통한 해석 결과가 표 4에 비교되어 있다. 해석결과들이 대략 95% 일치함을 보임에 따라 제안된 전달관계이론의 타당성이 검증되었다.

### 3.3 토크 상수 해석

제시된 모델에 대해 토크와 토크상수를 도출하기 위한 식은 다음과 같다[5].

$$T = r \times (-S \langle T_{r\theta}^c \rangle) = r \times (-s \mu_o \langle H_{rn}^c H_{\theta n}^c \rangle) \quad (23)$$

표 4. 전달관계이론과 유한요소법을 통한 인덕턴스 계산 결과 비교

구 분	유한요소법			전달관계이론		
	Full	Iron	Air	Full	Iron	Air
자기 인덕턴스	86.8	199	96.8	91	187	91
상호 인덕턴스	48.4	99.5	48.4	45.5	93.5	45.5

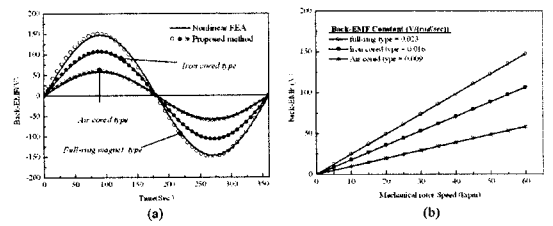


그림 5. 전달관계이론과 유한요소법을 통한 해석 결과 비교 : (a) 역기전력, (b) 역기전력 상수

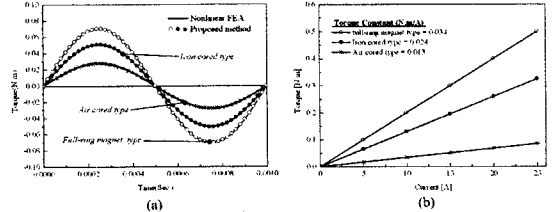


그림 6. 전달관계이론과 유한요소법을 통한 해석 결과 비교 : (a) 토크, (b) 토크 상수

$$K_T = \max(T / I_k) \quad (24)$$

그림 6은 입력전류 2A의 조건 하에서 계산된 토크와 토크상수에 대해 전달관계이론과 유한요소법을 통해 얻은 결과를 비교하고 있고 두 결과가 일치함을 확인할 수 있다.

## 3. 결 론

본 논문은 전자기 전달관계이론을 이용한 회전자 축 조건별 영구자석 동기전동기의 정특성 해석에 대하여 다루었다. 축 재질에 따라 Iron cored, Air cored, Full-ring permanent magnet type shaft의 세 가지 모델을 제시하였고, 각 모델에 대하여 본 논문에서 제시한 전달관계이론과 유한요소법을 통한 해석 결과를 비교 분석하여, 두 해석 결과가 일치함을 보임으로서 제안된 전달관계이론의 타당성을 증명하였다.

## 감사의 글

이 논문은 한국 생산기술연구원의 지원을 받아 수행된 논문입니다.

## [참 고 문 헌]

- [1] K. Ng, Z. Q. Zhu and D. Howe, "Open-Circuit Field Distribution in a Brushless Motor with Diametrically Magnetized PM Rotor, Accounting for Slotting and Eddy Currents Effects," IEEE Trans. Magn., vol. 32, no. 5, pp. 5070-5072, Sept. 1996.
- [2] X. Wang, Q. Li, S. Wang, Q. Li, "Analytical calculation of air-gap magnetic field distribution and instantaneous characteristics of brushless DC Motors," IEEE Trans. Energy Conversion, vol. 18, pp. 424-432,
- [3] J. R. Melcher, "Continuum Electromechanics," Cambridge, MA: MIT Press, 1981.
- [4] S.M. Jang, H. W. Cho, S. K. Choi, "Design and Analysis of a High-speed Brushless DC Motor for Centrifugal Compressor," IEEE Trans. Magn., vol. 43, pp. 2573-2575, June 2007.
- [5] S.M. Jang, K. J. Ko, J. H. Park, "Design Criteria and Electromagnetic Analysis of High speed Permanent Magnet Synchronous Machine" 11th International Conference Electrical Machines and Systems, SM P-29, Wuhan, China, October 17-20, 2008.