

포화함수를 이용한 주파수영역에서의 PI제어기설계

The Design of PI controller using a saturation function in frequency domain

오승록*
(Seungrohk Oh)

Abstract-we an autotuning algorithm for PI controller with unknown plant. The proposed algorithm uses a saturation function and time delay element as a test signal. Since the integral element of PI controller reduces a phase margin and amplitude margin in the closed loop system, the closed loop system could be resulted in unstable with PI controller. To avoid unstable in the closed loop system with PI controller, the proposed algorithm identifies one point information in the 3rd quadrant of Nyquist plot with a time delay element. The proposed method improves an accuracy of one point identified information with one saturation function.

Key Words : phase margin, amplitude margin, saturation function, time delay element

1. 서 론

PID 제어기의 계수들은 플랜트의 전달함수를 알고 있는 경우 주파수 영역에서 위상 마진과 크기 마진이 주어진 경우 분석적인 방법으로 결정이 가능하다^[1]. 플랜트의 전달함수를 알지 못하는 경우 경험이 많은 현장 기술자에 의해 제어기의 계수값을 결정하여 사용하여 왔다. 제어기의 계수값을 결정하는 방법으로 시험신호를 이용하여 플랜트의 정보를 알아내고 알아낸 플랜트의 정보를 이용하여 제어기 값을 결정하는 방법을 자동동조(autotuning)라 하며 편리성 때문에 많은 연구 진행되었으며 상용화 된 제품들이 출시되어 사용되고 있다^[2]. PID 자동 동조 시스템 중 시험신호로 릴레이를 이용한 방법^[3]은 릴레이가 갖고 있는 비 선형성으로 인해 플랜트의 출력에 발생하는 극한 사이클(limit cycle)의 크기와 주기를 측정하여 플랜트의 주파수영역에서의 한 점인 교차점(crossover point)을 찾아내고 이 한 점의 정보로부터 제어기의 계수값을 결정하는 방법이다. 릴레이를 이용한 자동 동조 방법이 제안된 이후 이와 관련된 연구^[3,4,5,6,7,8]들이 이루어졌다. [8]은 릴레이 사용으로 인한 고주파 발생으로 발생되는 교차점 정보의 오차를 줄이기 위해 포화함수를 사용하였으며 위상마진이 사양으로 주어진 경우 지연요소를 이용하여 안정성을 확보할 수 있는 제어기 설계방법을 제안하였다. 제안된 방법은 위상마진만을 만족하도록 설계하였다. 본 논문에서는 위상마진과 크기 마진이 동시에 주어진 경우 안정성을 확보할 수 있는 PI 제어기 설계 방법을 제안하고자한다.

2. 본 론

1.1 포화 함수를 이용한 PID 제어기 자동동조

릴레이를 이용한 자동동조 시스템은 미지의 플랜트의 정보를 얻기 위해 시험신호로 릴레이를 사용하며 시험신호 사용시 그림 1에서 폐루프 구성도는 X 점에 위치한다. 제어기의 파라메타 값은 출력신호의 크기와 주기를 이용하여 결정하며 파라메타 값이 결정되면 제어기를 연결하여 제어하게 된다. 즉 폐루프 구성도는 그림 1의 X점으로부터 Y으로 이동시켜 사용한다. 릴레이는 그림 1의 폐루프 출력에 극한 사이클(limit cycle)이 존재하는 조건을 만족하면^[9] 출력에 주기 신호를 발생하게 한다.

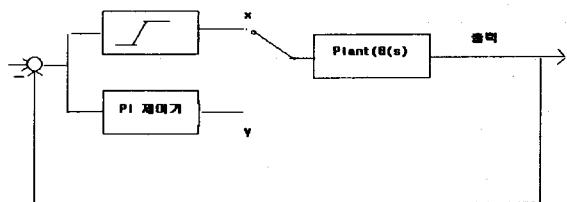


그림 1 자동 동조시스템의 구조

Fig. 1 Structure of autotuning system

비선형 요소인 릴레이는 등가의 선형요소인 묘사함수(describing function)로 대치할 수 있으며 다음 식을 만족한다^[9].

$$1 + G(jw)N(a) = 0 \quad (1)$$

여기서 $G(jw)$ 는 플랜트의 주파수 응답, 묘사함수 $N(a) = \frac{4h}{\pi a}$, h 는 릴레이의 크기, a 는 출력의 크기, $w = \frac{2\pi}{T}$ 로 T 는 플랜트 출력의 주기이다. 식(1)를 다시 쓰면

저자 소개

* 正會員 : 단국대학교 전자공학과 교수

$$G(jw) = -\frac{1}{N(a)} \quad (2)$$

이와 플랜트 전달함수 $G(s)$ 의 Nyquist 그림에서 음의 실수축을 통과하는 점의 값을 나타낸다. 이와 같이 계산된 한 점의 정보를 이용하여 PID제어기의 파라메타 값을 구할 수 있다^[3]. 시험신호로서 릴레이의 사용은 릴레이가 발생시키는 고주파 성분으로 인해 주파수 영역에서의 한 점의 정보에 대한 오차가 크게 발생할 수 있으며 오차를 줄이기 위해 다음 식으로 표현되는 포화함수(saturation function)를 시험신호로 사용하여 오차를 줄였다^[8].

$$sat(x) = \begin{cases} -h & x < -h/s \\ \frac{sx}{h} & -h/s \leq x \leq h/s \\ h & x > h/s \end{cases} \quad (3)$$

식(3)으로 주어지는 포화 함수의 묘사 함수는 다음 식으로 주어진다.

$$N_{sat}(a) = \begin{cases} s & \text{if } h > sa \\ p(a) & \text{if } h \leq sa \end{cases} \quad (4)$$

여기서 $p(a) = \frac{2s}{\pi} \left[\sin^{-1}\left(\frac{h}{sa}\right) + \frac{h}{sa} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{sa}\right)^2} \right]$ 이다.

1.2. 자연 요소를 이용한 PI 제어기 자동동조

지연시간이 d 인 자연 요소를 그림 3과 같이 추가하고 포화함수를 시험신호로 하는 자동 동조 시스템에서 출력 신호의 크기가 a_2 이고 주기가 T_2 인 경우 $1 + e^{-jw_2 d} G(jw_2) N_{sat}(a_2) = 0$ 을 만족한다. 여기서 $w_2 = 2\pi/T_2$ 이다. 자연요소 d , w_2 , a_2 는 알고 있는 값이므로

$$G(jw_2) = -\frac{1}{N_{sat}(a_2)} e^{jw_2 d} \quad (5)$$

를 이용하여 플랜트의 Nyquist 그림에서 3/4분면의 한점의 좌표를 계산할 수 있다.

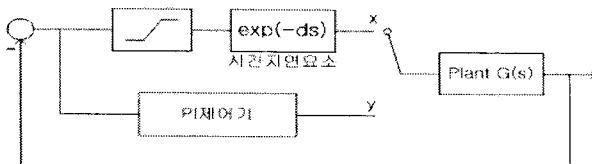


그림 2 시간지연 요소를 포함한 자동 동조시스템의 구조
Fig. 2 Structure of autotuning system with time delay element

지연요소의 지연시간 값 결정방법을 유도하기 위해 플랜트의 전달함수가 $G(s)$, 사양으로 주어진 위상마진이 θ_m , 크기 마진이 A_m 인 경우를 고려하였다. 지연시간의 선택은 [8]에 나와 있는 방법에 따라 선택하면 다음과 같다.

$$d > \theta_m/w_1 \quad (6)$$

가 되는 d 로 선택하면 된다. 여기서 $w_1 = 2\pi/T_1$ 이다. 이와 같이 계산된 시간지연 요소를 이용하여 $G(s)$ 한점의 좌표값을 찾으면 그림3의 좌표 값 Z 을 계산할 수 있다. 위상마진과 크기 마진을 만족하는 PI제어기 설계는 $C(jw_2)G(jw_2)$ 가 점 A, B, C로 둘러싸인 지역에 위치하도록 $C(jw_2)$ 선택하면 된다. 즉

$$C(jw_2)G(jw_2) = r e^{i(\pi + \theta_m)} \quad (7)$$

여기서 $w_2 = 2\pi/T_2$ 이고 T_2 는 시간지연 요소가 있는 경우의 출력의 주기이며 $r < 1/A_m$ 인 상수이다. 플랜트 출력으로부터 관측된 출력의 크기와 주기가 a_2 , T_2 인 경우 식(5)으로부터

$$G(jw_2) = -\frac{1}{N_{sat}(a_2)} e^{jw_2 d} = \frac{1}{N_{sat}(a_2)} e^{j(\pi + w_2 d)} \quad \text{이며}$$

$$C(jw_2) = k \left(1 + \frac{1}{jw_2 T_1} \right) = k \frac{\sqrt{(w_2 T_1)^2 + 1}}{w_2 T_1} e^{-j \tan^{-1}(\frac{1}{w_2 T_1})} \quad (8)$$

가 된다.

제어기 값은 식(7)과 식(8)로 부터

$$w_2 d - \tan^{-1}\left(\frac{1}{w_2 T_1}\right) = \theta_m \quad (9)$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{w_2 \tan(w_2 d - \theta_m)}$$

$$k \frac{\sqrt{(w_2 T_1)^2 + 1}}{w_2 T_1 N_{sat}(a_2)} = \frac{1}{A_m} \quad (10)$$

$$\Rightarrow k = \frac{w_2 T_1 N_{sat}(a_2)}{A_m \sqrt{(w_2 T_1)^2 + 1}}$$

로 구할 수 있다.

위상 마진 θ_m 이고 크기 마진 A_m 으로 사양이 주어진 경우 시간지연 요소와 포화함수를 이용한 PI 제어기 설계에 대한 절차를 요약하면 다음과 같다.

1) 그림 3에서 $d = 0$ 인 경우의 포화함수를 이용하여 플랜트 출력의 주기(T_1)측정

2) 지연요소의 지연시간 설정: $d > \frac{\theta_m}{w_1}$ 가 되는 d 로 설정. 여기서

$$w_1 = 2\pi/T_1$$

3) 그림 2에서 자연시간이 d 인 경우에 대해 포화함수를 이용하여 플랜트 출력의 주기(T_2) 및 크기(a_2) 측정

4) 식(9),식(10)을 이용하여 PI 제어기의 k , T_i 값 계산

3. 모의시험

그림 3에서 플랜트 전달함수가 $G(s) = \frac{1}{4s+1}e^{-2s}$ 이

고 위상마진 $>25^\circ$, 크기마진 >2 인 경우 고려하였다. 그림 4는 본 논문에서 제안한 방법을 이용하여 자연 시간 $d = 0$, 포화함수의 기울기가 4 인 경우의 플랜트 출력을 나타낸다. 그림에서 하단의 그림은 상단의 그림을 확대한 그림이다.

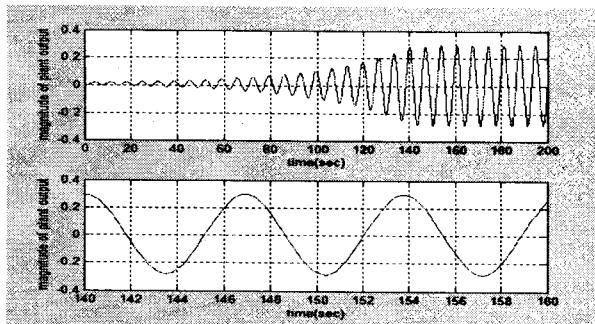


그림 4 자연 시간이 0인 경우의 플랜트 출력

Fig. 4 The plot of plant output with delay time=0

그림 7로부터 플랜트 출력의 주기 $T_1 = 7(\text{sec})$ 임을 관찰할 수 있다. 부등식(6)을 만족하는 자연시간은 $d = 1.07$ 로 선택하였다. 그림 5는 자연시간이 $d = 1.07$ 인 경우 포화함수를 이용한 경우의 플랜트 출력값을 나타낸 것이다.

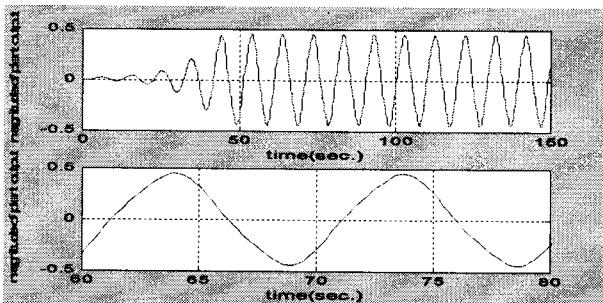


그림 5 자연 시간이 1.07인 경우의 플랜트 출력

Fig. 5 The plot of plant output with delay time=1.07

그림 5에서 플랜트 출력값의 크기 $a_2 = 0.45$, 주기 $T_2 = 9.8$ 이며 식(9)와 식(10)을 이용하여 PI 제어기의 제어기 값을 구하면 $k = 1.3$, $T_i = 6.13$ 로 계산되며 계산된 PI 제어기값과 실제

플랜트 $G(s) = \frac{1}{4s+1}e^{-2s}$ 가 포함된 폐루프의 위상 마진은 44.7° , 크기마진은 4.2로 계산됨을 확인할 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 자동 동조시스템에서 PI 제어기 사용시 I 성분에 의해 발생되는 위상 감소시에도 PI 제어기 설계가 가능하며 위상마진과 크기마진의 요구조건을 동시에 만족할 수 있는 자동동조 방법을 제시하였다. 또한 모의시험을 통해 제안된 방법의 타당성을 확인하였다.

참 고 문 헌

- [1] G. Franklin, J. Powell and M. Workman. "Digital Control of Dynamic Systems," Addison Wesley, New York, second edition, 1990.
- [2] K. Ang, G. Chong, Y. Li, "PID Control System Analysis, Design, and Technology," IEEE Transactions on Control System Technology, vol. 13, no. 4: 559-576, 2005
- [3] K. J. Astrom and T. Hagglund. "Automatic tuning of PID Controllers," Instrument Society of America, Research Triangle Park, 1988.
- [4] K. J. Astrom and T. Hagglund, and A. Wallenborg. "Automatic tuning of digital controllers with application to HVAC plants," Automatica, 29(5):1333-1343, 1993.
- [5] M. Zhuang and D. P. Atherton. "PID controller design for a TITO system," IEE Proc-Control Theory Appl., 141(2):111-120, March 1994.
- [6] D. Gu, Y Cai, P.Wang, W. Zhang, "Relay based feedback with PD controller for identification of unstable processes with large time delay," Proceeding of the 2007 ACC, 112-117, New York, U.S.A., 2007
- [7] Mats Friman and Kurt V. Waller, "A Two Channel relay for autotuning," Report 96-6, Abo Academy, 1996.
- [8] Seungrohk Oh. "PI controller design using saturation function" Journal of IKKEE 45SC(6):102-107, 2008.
- [9] H. K. Khalil. "Nonlinear Systems, second edition," Prentice Hall, New Jersey, 1996.