한국소음진동공학회 2009년 추계학술대회논문집, pp.864~865

음장 제어 이론

Theory of sound manipulation

김양한† ・ 송민호*

Yang-Hann Kim, Minho Song

1. 서 론

음장 제어(Sound manipulation) 이론은 공간 안에 분포한 다수의 음원을 제어하여 목적하는 음장을 정해진 공간 내에서 재현하는 방법이다(1). 음장 제어 문제는 수학 이론으로 크게 분류할 때, 푸리에 급수, 샘플링 이론과 같이 기저함수(Basis function)를 통해 적은 정보로 원하는 정보를 재구성(Reconstruction) 혹은 근사(approximate)하는 문제이다. 단, 음장 제어 문제에서 사용하는 기저함수는 제어 공간의 음향특성을 측정한 전달함수 벡터로서 선형 독립성이 보장되지 않고, 함수의 갯수가 한정되어 있다. 이로 인해 음장 제어 문제는 역문제(Inverse problem)로서 타당하지 않은 문제(ill-posed problem)로 분류할 수 있다. 타당하지 않은 문제란 해가 존재하되 유일하지 않거나, 해가 존재하지 않는 것을 의미한다(2).

본 논문에서는 음장 제어 문제를 타당하지 않은 문제에서 타당한 문제(well-posed problem)로 바꾸기 위해 기본적으로 고려해야 하는 두 가지 문제를 제시한다.
하나는 기저함수의 선형 독립성, 또 하나는 이들의 상관성(Correlation)이다. 이를 알기 위해 전달함수 행렬의 column space 를 구성하는 기저 함수들의 특성과 음장의 관계를 알아보기로 한다.

2. 본 론

2.1 기저함수를 이용한 재구성 문제

(1) 수학에서 일반적인 재구성 문제

유한 차원의 함수공간 $\mathbf{S}$ 를 구성하는 기저함수를 $\{\mathbf{p_k}\}_{k=1}^{N}$ 라 하면 $\mathbf{S}$ 에 존재하는 임의의 함수 $\mathbf{p}$ 는 기저함수의 선형 합으로 나타낼 수 있으며 $\{c_\mathbf{k}\}_{k=1}^{N}$ 를 대응하는 계수라 할 때, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{p_k} \tag{1}$$

즉, 기저함수 $\{\mathbf{p_k}\}_{k=1}^{N}$ 가 결정되면 함수 $\mathbf{p}$ 는 수열 $\{c_\mathbf{k}\}_{k=1}^{N}$ 와 대응한다.

$$\mathbf{p} \leftrightarrow \{c_k\}_{k=1}^{N} \tag{2}$$

함수 $\mathbf{p}$ 에서 $\{c_\mathbf{k}\}_{k=1}^{N}$ 를 구하는 과정을 분해(Decomposition)라 하고, $\{c_\mathbf{k}\}_{k=1}^{N}$ 에서 $\mathbf{p}$ 를 구하는 과정을 재구성이라 한다. 참고로 함수공간 $\mathbf{S}$ 는 정해진 정의역(Domain)에서 기저함수들의 선형 합으로 재구성이 가능한 함수들의 집합이다. 그리고 기저함수라는 가정이 있으므로 $\{\mathbf{p_k}\}_{k=1}^{N}$ 는 선형 독립이다.

(2) 음장 제어에서의 재구성 문제

위에서 언급한 함수공간 $\mathbf{S}$ 는 재현하고자 하는 음장들의 집합으로 생각할 수 있다. N 개의 음원에 대해 M 개의 측정점에서 전달함수를 측정한다고 가정하고, i 번째 음원의 전달함수를 $\mathbf{h_i}(i=1,\ldots,N)$ 라 정의하자. $\mathbf{h_i}$ 는 M 개의 성분을 가진 벡터로, 하나의 음원의 단위 입력에 따른 M 개의 측정 위치에서의 음압의 응답을 뜻한다. 이를 행렬로 표시하면 전달함수 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{h_1} & \mathbf{h_2} & \cdots & \mathbf{h_N} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{3}$$

다수의 음원을 이용하여 공간 내의 음압(sound pressure)을 제어할 경우, 제어 공간내의 임의의 점에서의 음압은 N 개의 제어 음원의 영향(response)이 선형적으로 작용한다고 가정할 수 있다.

$$\mathbf{p} = \mathbf{Hq} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{h_1} & \mathbf{h_2} & \cdots & \mathbf{h_N} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{h_i} \tag{4}$$

† 정회원; Center for Noise and Vibration Control (NOVIC), KAIST 기계공학과
E-mail : yanghannkim@kaist.ac.kr
Tel : (042) 350-3025, Fax : (042) 350-8220
* KAIST 문화기술대학원

이와 같이 음장 제어 문제는 기저함수를 이용한 재구성 문제임을 알 수 있다.

2.2 음장과 기저함수의 관계

(1) 직접 제어 문제

주어진 공간내의 제어 위치에서의 음압을 매칭하는 문제이다. $\tilde{\mathbf{p}}$ 를 원하는 음장이라 하면, 주어진 문제는 영역 내의 모든 점에서 원하는 음장 $\tilde{\mathbf{p}}$ 또는 이에 근접하는 음장 $\mathbf{p}$ 를 재현하는 문제이다.

$$\mathbf{p} \rightarrow \tilde{\mathbf{p}} \tag{5}$$

일반적으로 측정점의 갯수 M 이 음원의 갯수 N 보다 크기 때문에, 이러한 점 위주(point-wise) 수렴 방식은 기저함수에 의해 표현 불가능한 경우 ($\tilde{\mathbf{p}} \notin span\{\mathbf{h_i}\}_1^N$), 역문제의 난점이 생기게 된다. 이를 해결하기 위해서는 단지 음원의 갯수 N 를 증가시키는 것 뿐만 아니라 공간 $span\{\mathbf{h_i}\}_1^N$ 의 차원을 증가시켜야 한다는 것을 의미한다.

(2) 특성 제어 문제

음장 특성을 제어하는 문제는 직접적인 음장을 제어하는 것이 아니라, 공간의 음장 특성을 정의하는 기준(measure)을 세우고 이를 최대화 혹은 최소화하는 문제이다. 예를 들어 음향 포텐셜 에너지를 척도로 이용한 음장 밝기 제어를 생각해보자. 음향 포텐셜 에너지는 다음과 같이 정의할 수 있다(3).

$$e_b = \mathbf{p}^{\mathbf{H}}\mathbf{p} \tag{6}$$

이를 정리하면, 여러 가지 벡터의 내적으로 나타낼 수 있다.

$$e_b = \mathbf{p}^{\mathbf{H}}\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|^2 = <\mathbf{Hq}, \mathbf{Hq}> \tag{7}$$

음장 제어에서 밝기 제어는 벡터 $\mathbf{Hq}$ 의 크기, 즉 $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{Hq}\|$ 를 최대화하는 최적화 문제이다.

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{h_i}\right\|^2 \le \left\|H^* H\right\| \cdot \sum_{i=1}^{N} |q_i|^2 \tag{8}$$

위의 부등식은 공간 내에서 만들 수 있는 최대 음향 포텐셜 에너지 밀도는 $\|H^* H\|$ 와 $\sum_{i=1}^{N}|q_i|^2$ 에 의해 결정됨을 알 수 있다. 즉, $\sum_{i=1}^{N}|q_i|^2$ 는 입력 에너지와 관련된 값으로, 입력 에너지가 많을 수록, $\|H^* H\|$ 값이 클수록 더 큰 에너지 밀도를 가진 영역을 생성할 수 있음을 의미한다. 이 때, $\|H^* H\|$ 의 값을 전달함수 집합의 최대 유계라 부른다. 같은 방법으로 최소 유계를 유도할 수 있고, 결과는 다음과 같다.

$$\frac{1}{\left\|(H^* H)^{-1}\right\|} \cdot \sum_{i=1}^{N} |q_i|^2 \le \|\mathbf{p}\|^2 \le \left\|H^* H\right\| \cdot \sum_{i=1}^{N} |q_i|^2 \tag{9}$$

최소 유계를 상수 A, 최대 유계를 상수 B 라 할 때, 상수 A, B 는 집합 $\{\mathbf{h_i}\}_1^N$ 의 선형 특성에 좌우한다. 위의 수식에서 상수 A, B 는 벡터 집합의 선형 독립성을 평가하는 척도이다. 벡터 집합이 직교집합(orthogonal set)인 경우 상수 A, B 는 A = B = 1 의 성질이 성립한다(Parseval 의 등식)(4). 위의 경우, $\|\mathbf{p}\|^2 = \sum_{i=1}^{N}|q_i|^2$ 의 등식이 성립하게 되어 주어진 영역에서 밝기 제어는 불가능 함을 보여준다.(밝기가 언제나 일정하다) 반면에 같은 조건에서 전달함수의 특성이 직교성에서 멀어질수록 더 밝은 영역을 생성할 수 있음을 보여준다. 수학적으로, 전달함수가 직교집합인 경우, 재생하는 음장 공간 $span\{\mathbf{h_i}\}_1^N$ 의 차원이 증가하여 각각의 점에서 원하는 음압에 좀더 근접한 해를 얻을 수 있다. 그러나 에너지를 집중하는 밝기 문제에서 전달함수 집합이 직교 집합이 되는 것은 공간 내에 에너지 제어를 할 수 없다는 결론을 내릴 수 있다. 전달함수 집합이 직교 집합이라는 것은 함수 사이의 상관성이 없다는 것을 뜻한다. 반면에 선형 독립이 아닌 경우 (linearly dependent), 벡터 사이의 상관성은 최대이다.

3. 결 론

음장 제어 문제는 기저함수를 이용하여 원하는 음장을 재구성하는 문제이다. 이 때, 기저함수가 생성하는 공간의 특성, 즉 기저함수의 특성이 음장 제어 문제의 타당성과 관련이 있다. 음장을 직접 제어하는 문제에서는 기저함수 집합의 특성이 직교성을 가질수록 좀 더 원하는 음장에 근접한 해를 얻을 수 있다. 반면에 밝기 제어와 같은 음장 특성 제어 문제에서는 전달함수 집합이 직교 집합에서 멀어져 상관성이 높을수록, 더 큰 에너지 밀도를 가진 영역을 생성할 수 있다.

참고 문헌

(1) J.-W. Choi, *Spatial Manipulation and Implementation of Sound*, Doctorial Thesis at KAIST, 2005.

(2) J.Hardamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Yale University Press, 1923

(3) J.-W. Choi, Y.-H. Kim, 2002, "Generation of an acoustically bright zone within an illuminated region," J. Acoust. Soc. Am. Vol. 111(4), pp. 1695-1700.

(4) Ole Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhauser, Boston, 2003