한국소음진동공학회 2009년 추계학술대회논문집, pp.850~854

마찰감쇠기가 설치된 건물 응답의 근사해 : 재 고찰 및 새로운 결과

Approximate solution for a building installed with a friction damper : revisited and new result

민경원† · 성지영* · 이성경**
Min, Kyung-Won, Seong, Ji-Young and Lee, Sung-Kyung

Key Words : friction damper (마찰감쇠기), viscous damping (점성감쇠), equivalent damping ratio (등가감쇠비), dynamic magnification factor (동적확대계수), energy balance (에너지균형), friction force ratio (마찰력비), resonance frequency (공진진동수), steady-state response (안정상태응답)

ABSTRACT

Approximate analysis for a building installed with a friction damper is revisited to get insight of its dynamic behavior. Energy balance equation is used to have a closed analytical form solution of dynamic magnification factor (DMF) for the building with combined viscous and friction damping. It is found out that DMF is dependent on friction force ratio and resonance frequency. Linear transfer function from input external force to output building displacement is obtained by simplifying DMF equation. Root mean square of building displacement is derived under earthquake-like random excitation. Finally, design of friction damper is proposed by processing target control ratio, damping ratio factor, and friction force in sequence.

1. 서 론

마찰감쇠기(이하 감쇠기라 칭함)를 설치하여 지진 등 외력을 받는 건물의 동적응답을 감소시켜줄 수 있다. 감쇠기는 수학적으로 Coulomb 형 마찰의 특성을 나타내며 건물의 움직임 방향인 속도와 반대방향으로 마찰력이 작용한다. 건물은 고유의 점성(viscous) 감쇠를 가지고 있기 때문에 외력 $p(t)$를 받는 건물의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{u} + c_v\dot{u} + ku - f_d sgn(\dot{u}) = p(t) \qquad (1)$$

여기서 $m,\ c_v,\ k$는 각각 단자유도로 치환된 건물의 질량, 점성감쇠상수, 강성이다. u와 $\dot{u}$는 각각 건물의 변위와 속도 응답이다. f_d와 $sgn(\dot{u})$은 각각 감쇠기의 마찰력과 사인함수이다.

수학적으로 비선형인 위 미분방정식의 정해 (closed form analytical solution)을 구하는 일은 외력 $p(t)$의 형태에 달려있다. 지진과 같은 랜덤(random)한 하중일 경우에는 불가능하여 수치해석 방법으로 해를 구할 수 있다. 조화하중(harmonic loading)일 경우에는 Den Hartog 와[1] Hundal 이[2] 정상상태에서의 정해를 구하였다. Den Hartog 는 점성과 쿨롱감쇠가 있는 질량체의 응답을 해석과 실험방법으로 구하여 연속과 불연속 특성을 파악하였다. Hundal 은 점성감쇠가 있을 경우 지반조화진동을 받을 때의 정해를 구하였다. Liang 은[3] 점성 및 쿨롱 감쇠가 있을 때 자유진동응답 정해를 구하였다. 모두 미분방정식의 응답을 정상상태의 조화응답으로 가정하여 정해를 구하였기에 마찰력이 조화가진 진폭과 비교하였을 때 일정한 비율로 작아야만 하는 제한이 있다. 마찰력이 그렇지 않고 조화가진 진폭과 비교하여 클 경우에는 정해 및 근사해 구하기는 불가능하여 수치해석만이 유일하다. 민 경원 등은[4] 미분방정식의 수치해석해를 근거로 응답의 연속 및 불연속 특성을 파악하였다. 정상상태에서 외부하중에 의한 입력에너지가 점성 및 마찰감쇠 에너지로 전부 소산되는 에너지 균형을 이용하여 간단하게 변위응답계수(Dynamic magnification factor)를 구하였다. 이상현 등은[5] TMD 와 가이드레일간의 마찰력을 고려하여 조화지반가진에서의 최적 마찰력을 제시하였다.

† 교신저자; 정회원, 단국대학교 건축공학과
E-mail : kwmin@dankook.ac.kr
Tel : (031)8005-3734, Fax : (031)8005-3755
* 단국대학교 건축공학과
** 단국대학교 건축공학과

지진하중을 받는 건물의 동적응답을 감소시켜주기 위하여 마찰감쇠기가 이용된다. 지진하중은 조화하중과는 달리 랜덤하중이다. 정상상태에서의 응답이 아니라 랜덤응답의 평균응답(Root mean square)이 중요하다. 이것은 시간영역의 미분방정식을 진동수영역의 대수방정식으로 변환하여 전달함수를 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 그러나 미분방정식이 선형이어야 하는 제한이 있다. 식 (1)은 비선형 미분방정식이기 때문에 변위 및 하중의 비인 전달함수를 구할 수 없다.

본 연구에서는 조화하중을 받는 단자유도계 건물에 설치된 마찰감쇠기를 등가의 점성감쇠기로 가정하여 아래와 같이 선형형태의 미분방정식으로 변환하였다. 변환방법으로는 한 주기에서 마찰감쇠기로 소산되는 에너지와 등가점성감쇠기의 등가점성감쇠상수 c_{eq}로 소산되는 에너지와 같다고 하는 가정이다.[6]

$$m\ddot{u} + \left(c_v + c_{eq}\right)\dot{u} + ku = F_0 \sin\omega t \tag{2}$$

여기서 F_0와 ω는 각각 가진진폭과 가진진동수이다. 에너지 균형식을 이용하여 변위응답계수의 해석적인 해를 유도하였으며 등가점성감쇠비를 구하여 마찰감쇠기의 감쇠역할을 파악하였다. 변위응답계수식은 진동수 영역으로 표현이 되어 있으나 하중이 식에서 따로 분리가 되지 않는 즉, 하중에 관해서는 비선형식이다. 변위응답계수, 마찰력, 하중과 진동수비가 모두 등가점성감쇠비에 연관되어 있다. 지진하중의 진동수대역이 광역(broad-band frequency)이고 건물의 전달함수 대역이 협소영역(narrow-band frequency)이라고 가정하면 등가점성감쇠비에 관련된 변수를 공진진동수의 변수로 대체할 수 있어 상수라 여길 수 있다. 변위응답계수식의 형태가 전달함수식의 형태로 변환이 되어 랜덤하중에 관한 건물의 평균응답을 구할 수 있다.

2. 변위응답계수식

외부하중을 받는 구조물의 에너지 균형식은 다음과 같이 외부하중에 의한 입력에너지 E_I가 운동에너지 E_K, 점성감쇠에 의한 소산에너지 E_v, 마찰감쇠기에 의한 등가점성감쇠의 소산에너지 E_{eq}와 변형에너지 E_S의 합과 같다는 식으로 나타낼 수 있다.

$$E_I = E_K + E_v + E_{eq} + E_S \tag{3}$$

정상상태 응답에서 한 주기 동안의 에너지변화를 고려하여 보면 E_K, E_S는 변화가 없다. E_I는 E_v와 E_{eq}의 합으로 나타나며 식 (4)와 같이 표현된다.

$$\pi F_0 u_0 \sin\phi = \pi(c_v + c_{eq})\omega u_0^2 \tag{4}$$

여기서 u_0는 동적변위진폭이다. c_v와 c_{eq}를 각각 감쇠비 ξ_v와 ξ_{eq}로 변환하여 식 (4)를 구성하면 다음과 같다.

$$\pi F_0 u_0 \sin\phi = 2k\pi(\xi_v + \xi_{eq})\omega_r u_0^2 \tag{5}$$

여기서 ω_r은 진동수비로 ω/ω_n이며 ω_n는 고유진동수이다. $\sin\phi$와 ξ_{eq}는 각각 다음의 식으로 표현된다.

$$\sin\phi = \frac{2(\xi_v+\xi_{eq})\omega_r}{\left[(1-\omega_r^2)^2+(2(\xi_v+\xi_{eq})\omega_r)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

$$\xi_{eq} = \frac{2f_d}{\pi k \omega_r u_0} \tag{7}$$

식 (6)과 식 (7)을 식 (5)에 대입하면 다음과 같이 변위 u_0에 대한 2 차방정식으로 표현이 된다.

$$A_1 u_0^2 + 2A_2 u_0 + A_3 = 0 \tag{8}$$

위에서 A_1, A_2, A_3는 각각 다음의 식으로 나타난다.

$$A_1 = (1-\omega_r^2)^2 + 4\omega_r^2\xi_v^2 \tag{9}$$

$$A_2 = \frac{8\omega_r\xi_v f_d}{\pi k} \tag{10}$$

$$A_3 = \left(\frac{4f_d}{\pi k}\right)^2 - \left(\frac{F_0}{k}\right)^2 \tag{11}$$

식 (8)에서 2 차방정식의 유효근을 구하고 변위응답계수로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{u_0}{u_{st}} = -B_1 F_r + \sqrt{B_2 - B_3 F_r^2} \tag{12}$$

위에서, F_r은 외력에 대한 마찰력의 비로 f_d/F_0이며 u_{st}는 정적변위인 F_0/k 이다. B_1, B_2, B_3는 각각 다음의 식으로 표현된다.

$$B_1 = \frac{8}{\pi}\frac{\omega_r\,\xi_v}{(1-\omega_r^2)^2 + 4\,\omega_r^2\,\xi_v^2} \tag{13}$$

$$B_2 = \frac{1}{(1-\omega_r^2)^2 + 4\,\omega_r^2\,\xi_v^2} \tag{14}$$

$$B_3 = \left[\frac{(1-\omega_r^2)}{(1-\omega_r^2)^2 + 4\,\omega_r^2\,\xi_v^2}\frac{4}{\pi}\right]^2 \tag{15}$$

식 (12)는 항상 0 보다 큰 값이다. 다음과 같은 조건식이 유도된다.

$$\sqrt{B_2 - B_3 F_r^2} > B_1 F_r \tag{16}$$

식 (16)에 (13), (14), (15)의 식을 대입하면 다음의 조건식을 유도할 수 있다.

$$F_r < \frac{\pi}{4} \tag{17}$$

식 (17)과 동시에 식 (12)에서 제곱근 속의 값이 0 보다 크거나 같은 값을 가져야 한다. 하지만 0 일 경우에는 변위응답계수의 값이 (−)가 되므로 제곱근 속의 값은 항상 0 보다 큰 값이어야 하므로 다음과 같은 조건식이 유도된다.

$$F_r < \frac{\pi}{4}\left[1 + \left(\frac{2\omega_r \xi_v}{1-\omega_r^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

위 식의 $(2\omega_r\xi_v/1-\omega_r^2)^2$은 항상 1 보다 크기 때문에 식 (17)의 조건식이 식 (18)의 부분집합이 된다. 따라서 식 (17)의 조건을 만족하는 범위 안에서 변위응답계수를 구할 수 있다.

다음 그림은 $\xi_v = 0.01$일 때 변위응답계수를 ω_r과 F_r의 변화에 따라 나타낸 것이다. 공진에서 계수가 매우 커지며 F_r이 커질수록 계수가 작아지는 것을 알 수 있다.

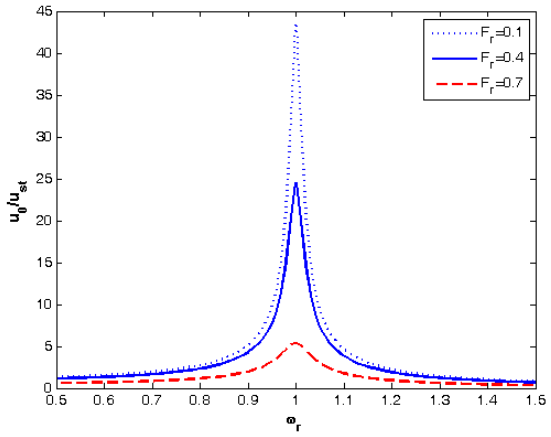

Fig. 1 ω_r과 F_r에 따른 변위응답계수 u_0/u_{st}의 변화

점성감쇠가 없는 경우 즉, 점성감쇠비 ξ_v가 없는 경우의 변위응답계수식과 조건식은 식 (12)에 $\xi_v = 0$을 대입하여 다음과 같이 구해진다. 이 결과는 기존의 마찰감쇠만 있는 경우의 결과와 동일하다.[6]

$$\frac{u_0}{u_{st}} = \frac{\left[1-\left(\frac{4}{\pi}F_r\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{|1-\omega_r^2|} \tag{19}$$

$$F_r < \frac{\pi}{4} \tag{20}$$

공진인 경우 즉, $\omega_r = 1$일 때 식 (12)는 다음과 같다.

$$\frac{u_0}{u_{st}} = \frac{1-\frac{4}{\pi}F_r}{2\xi_v} \tag{21}$$

위 식에서 볼 수 있듯이 공진일 경우에는 점성감쇠비 ξ_v가 있어야 정상상태응답을 의미하는 마찰력 f_d가 존재한다. ξ_v가 0 일때는 정상상태를 나타내는 f_d는 존재하지 않는다. 즉, 공진시에는 조화입력에너지가 마찰에 의한 소산에너지보다 항상 커서 정상상태 응답을 보이지 않고 진폭이 계속 커지는 결과와 일치한다.[6]

3. 등가점성감쇠비

식 (12)에서 변위응답계수식에 영향을 주는 요인은 ξ_v, ω_r, F_r인 것을 알 수 있다. 등가점성감쇠비 ξ_{eq}도 ξ_v, ω_r, F_r로만 구성되도록 식 (7)을 변형하면 다음과 같이 표현된다.

$$\xi_{eq} = \frac{4}{\pi}F_r \frac{1}{u_0/u_{st}} \frac{1}{2\omega_r} \tag{22}$$

위 식과 같이 ξ_{eq}은 마찰력비와 진동수비가 주어진다면 변위응답계수에 좌우된다. Fig.2 는 식 (12)에 의하여 구한 변위응답계수를 식 (22)에 대입하여 구한 ω_r과 ξ_{eq}의 그림이다. Fig.1 에서 나타나듯 $\omega_r = 1$일 때 변위응답계수값이 가장 커서 그 때의 ξ_{eq}가 제일 작게 나타나는 것을 알 수 있다.

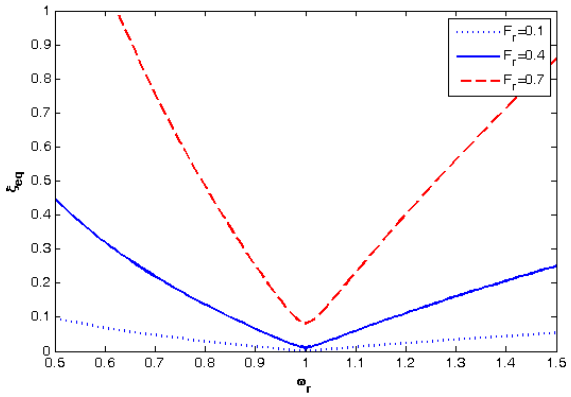

Fig. 2 ω_r에 따른 ξ_{eq}의 변화

Fig.1 에서 마찰력이 있다고 하더라도 변위응답계수 그림은 진동수 대역이 협소영역(narrow-band frequency)인 것을 알 수 있다. 지진과 같은 랜덤하중의 진동수 대역을 광역(broad frequency band)으로 가

정한다면 공진일 때의 감쇠비가 변위응답에 결정적 영향을 미친다.

식 (5)에 식 (6)을 적용하여 ξ_v와 ξ_{eq}로 표현하면 다음과 같이 변위응답계수를 나타낼 수 있다.

$$\frac{u_0}{u_{st}} = \frac{1}{\left[(1-\omega_r^2)^2+(2(\xi_v+\xi_{eq})\omega_r)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{23}$$

식 (21)에 의하여 계산된 변위응답계수를 이용하여 식 (22)에서 $\omega_r = 1$일 때의 ξ_{eq}를 구할 수 있다. 이때의 ξ_{eq}를 식 (23)에 대입하여 변위응답계수를 간단히 구할 수 있다.

위의 방법으로 구한 변위응답계수와 식 (12)의 변위응답계수를 수치적으로 표현한 것을 비교한 그림은 다음과 같다.

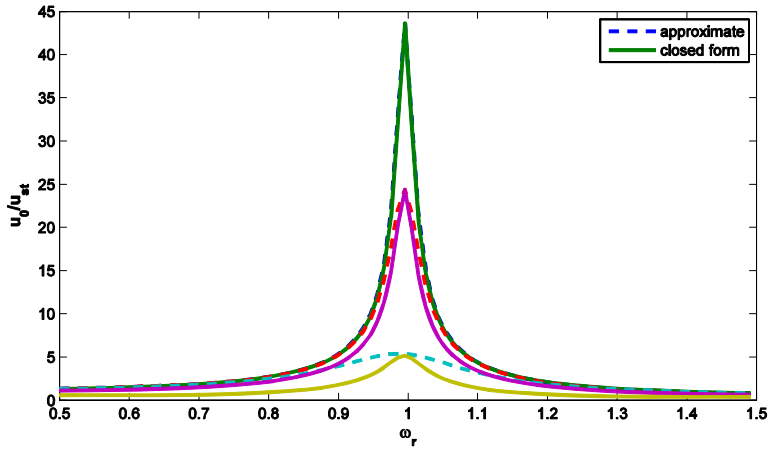

Fig. 3 ω_r에 따른 변위응답계수 u_0/u_{st}의 변화비교

Fig. 3 의 비교에서 알 수 있듯이 F_r이 적을 때에는 공진일 때의 ξ_{eq} 값을 이용하여도 변위응답은 큰 차이가 없다는 것을 확인하였다.

4. 제어율

식 (23)에서 정적변위 u_{st}를 우변으로 이동시켜 정리하면 다음과 같은 전달함수의 형태가 된다.

$$u_0 = H(\omega)\, F_0 \tag{24}$$

여기서

$$H(\omega) = \frac{1}{k\left[(1-\omega_r^2)^2+(2(\xi_v+\xi_{eq})\omega_r)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{25}$$

본래 식 (22)에서와 같이 ξ_{eq}에는 변위와 하중이 포함되어 있으나 공진일 때 ξ_{eq}로 가정하여 ξ_{eq}값이 고정되면 위와 같은 근사 전달함수로 만들 수 있다.

건물에 가해지는 지진하중의 진동수 대역을 광역(broad frequency band)이라고 하면 건물의 변위평균 σ_f를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_f^2 = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2\, d\omega \tag{26}$$

S_0는 건물의 고유진동수에서의 지진하중 파워스펙트럼이다. 식 (26)은 다음과 같이 구해진다.[7]

$$\sigma_f^2 = \frac{\pi}{2}\frac{S_0}{(\xi_v+\xi_{eq})m^2\omega_n^3} \tag{27}$$

마찰감쇠기가 없을 경우에는 즉, $\xi_{eq} = 0$일 때 변위평균으로 식 (27)을 나누면 마찰감쇠기의 변위평균 제어율 J_f을 구할 수 있다.

$$J_f = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\xi_{eq}}{\xi_v}}} \tag{28}$$

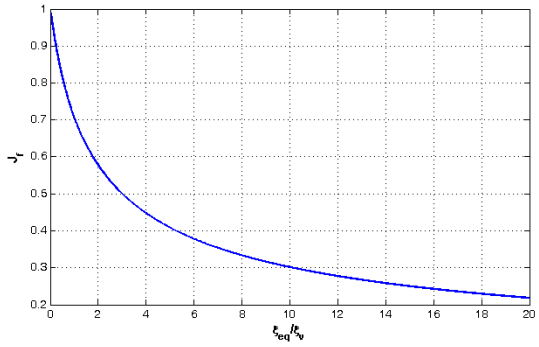

Fig. 4 $\frac{\xi_{eq}}{\xi_v}$에 따른 제어율 J_f

식 (28)에서 알 수 있듯이 제어율은 ξ_v와 ξ_{eq}의 비율에 관계한다. 즉 ξ_v이 작을수록 ξ_{eq}를 조금 증가시켜도 ξ_{eq}/ξ_v값이 커져 제어율을 높일 수 있다.

5. 마찰감쇠기 설계

4 절에서 제어율이 등가감쇠비 비율로 결정된다는 것을 알았다. 식 (21)과 $\omega_r = 1$일 때의 식 (22)를 이용하면 다음과 같이 마찰감쇠기의 마찰력 f_d가 구해진다.

$$f_d = \frac{\pi}{4}\frac{\frac{\xi_{eq}}{\xi_v}}{1+\frac{\xi_{eq}}{\xi_v}}F_0 \qquad (29)$$

식 (29)에서 지진하중과 같은 랜덤하중일 때 F_0는 푸리에 변환된 공진진동수 에서의 진폭이다. 목표제어율이 정해지면 등가감쇠비 비율을 구할 수 있다. 다음 그림은 감쇠비 비율에 따른 마찰력비 F_r이다.

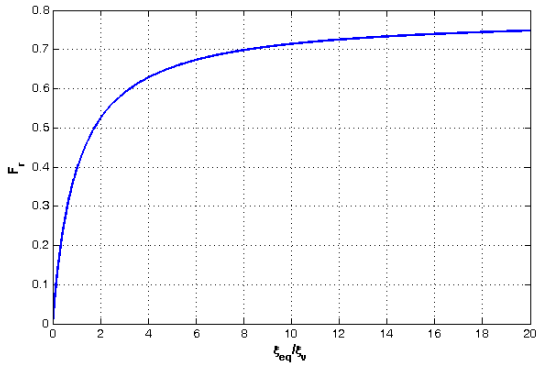

Fig. 5 $\frac{\xi_{eq}}{\xi_v}$에 따른 마찰력비 F_r

마찰감쇠기 설계를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 원하는 제어율인 목표제어율(target control ratio)을 결정한다. 둘째, Fig. 4 에서 감쇠비 비율을 구한다. 셋째, Fig. 5 에서 마찰력비를 구하여 감쇠기의 마찰력을 결정한다.

6. 결 론

마찰감쇠기가 설치된 건물의 동적응답을 파악하기 위한분석을 정상상태응답에서 입출력의 에너지 균형식을 이용하여 다시 시도하였다. 변위응답계수에 관한 해석적인 식을 새롭게 그리고 쉽게 유도하였다. 기존 연구와 동일한 결과를 나타내었다. 변위응답계수식은 마찰력비와 공진진동수의 함수인 것을 파악하였다. 공진진동수가 계수식에 가장 큰 영향을 미친다는 사실을 바탕으로 비선형 계수식을 선형의 근사 전달함수식으로 변환을 하였다. 지진과 같은 랜덤가진하중에서의 평균응답을 전달함수식으로부터 유도하였다. 마찰감쇠기의 있을 때와 없을 때의 평균응답비인 제어율를 해석적으로 구하였다. 목표제어율을 정하여 감쇠비 비율을 구하고 최종적으로 마찰감쇠기의 마찰력을 결정하는 설계절차를 제시하였다.

후 기

본 연구는 2009 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 (No. 2009-0076304)주관으로 수행된 과제 및 국토해양부 첨단도시개발사업 (과제번호: 05 건설핵심 D06)의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다. 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참 고 문 헌

(1) Den Hartog, J. P., 1931, Forced Vibrations with Combined Coulomb and Viscous Friction, Trans. ASME. Vol.53, pp. 107~115.

(2) Hundal, M. S., 1979, Response of a base excited system with Coulomb viscous friction, Journal of Sound and Vibration. Vol.64, No.3, pp. 371~378.

(3) Liang, J. W., 2005, Identifying Coulomb and viscous damping from free-vibration acceleration decrements, Journal of Sound and Vibration. Vol.282, pp. 1208~1220.

(4) 민경원, 성지영, 이성경, 2009, 마찰 및 점성 감쇠가 있는 구조물의 응답 불연속 및 에너지 소산, 한국전산구조공학회, 심사중.

(5) 이상현, 우성식, 조승호, 정란, 2007, 레일의 운동마찰력을 고려한 TMD 최적설계, 한국소음진동공학회 논문집, 제 17 권, 제 6 호, pp. 553~559.

(6) Anil K. Chopra, 2001, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, U.S.A., p.844.

(7) Stephen H. Crandall, William D. Mark, 1973, Random Vibration, Academic press., U.S.A., p.165.