

# 비동위치화된 전자기 베어링에 의해 지지된 강체회전체의 안정성 해석 Stability Analysis of Rigid Rotor Supported by Noncollocated Active Magnetic Bearings

전한옥† · 이종원\*

Jeon, Han-Wook and Lee, Chong-Won

## 1. 서론

전자기 베어링은 지난 수십여 년간에 걸쳐 연구되어 왔으며, 무접촉 부상의 장점 등을 바탕으로 여러 초고속 회전기기에 그 응용범위를 넓혀가고 있다 [1]. 전자기 베어링은 크게 전자기력을 발생시켜 회전을 지지하는 전자식 구동기 부분과 귀환 PD 제어를 위해 회전체 반경 방향 변위를 측정하는 변위 센서로 이루어져 있다. 한편 구동기와 센서는 회전체 길이 방향으로 그 위치가 서로 비동위치화(non-collocated)되어 있기 때문에 귀환 제어 성능의 저하와 불안정성의 야기등과 같은 문제점을 내포하게 된다 [2]. 따라서 본 발표에서는 시스템의 안정된 구동을 위해 비동위치화(non-collocation)의 전제 아래 PD 제어 계인을 변수로 안정성(stability)을 판단하는 일반적인 기준을 제시하고자 한다. 이를 위해 자이로스코픽 시스템의 안정성 판단 척도인 Kelvin-Tait-Chetaev (KTC) 이론[3]과 정방 행렬의 대칭화 방법인 Taussky 의 이론[4]을 활용하였다. 새롭게 제시한 방법을 통해 매 주어진 제어 계인과 회전 속도마다 고유치 해석을 통해 안정성을 판단하는 방법을 개선하여 회전 속도와 관계 없이 적용 예상되는 제어 계인 영역에 걸쳐 안정성을 손쉽게 판단하는 기준을 제시한다.

## 2. 비동위치화된 시스템의 모델과 안정성 해석

### 2.1 센서 좌표계로의 운동 방정식 변환

그림 1 은 비동위치화된 전자식 구동기와 변위 센서의 일례를 보여준다. 전자기 베어링의 베어링 좌표계에서의 운동 방정식은 다음과 같다 [1].

$$\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{D}_b \dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{K}_b \mathbf{q}_b = \mathbf{f}_b \quad (1)$$

이 때  $\mathbf{f}_b (= -\mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{K}_p \mathbf{q}_s)$  는 귀환 PD 제어기에 의한 제어 입력이며,  $\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_s$  는 각각 베어링, 센서 좌표계의 상태 벡터이다. 두 좌표계 사이의 변환 행렬을 통해 식 (1)은 다음 복소 센서 좌표계에서의 운동 방정식이 된다.

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{p}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{p}}_s + \mathbf{K}_s \mathbf{p}_s = \mathbf{0} \quad (2)$$

이 때 각 시스템 행렬은

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} ml_2^2 + j_d & ml_1 l_2 - j_d \\ ml_1 l_2 - j_d & ml_1^2 + j_d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_1)K_{d1} & -\alpha_1 K_{d1} \\ -\alpha_2 K_{d2} & (1 + \alpha_2)K_{d2} \end{bmatrix} - j\Omega \begin{bmatrix} j_p & -j_p \\ -j_p & j_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_1)K_{p1} & -\alpha_1 K_{p1} \\ -\alpha_2 K_{p2} & (1 + \alpha_2)K_{p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_1 & 0 \\ 0 & -K_2 \end{bmatrix}$$

로 정의되며  $\alpha_1, \alpha_2$  는 두 베어링의 비동위치화에 대한 정량화 값이다.

### 2.2 유사변환을 활용한 안정성 해석

좌표변환된 모델, 식 (2)에 대한 고유치 해석을 수행하면(편의를 위해 아래첨자는 생략)

$$(\lambda^2 \mathbf{I} + \lambda \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3)$$

이 되며 Taussky 의 이론을 적용하여  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} (= \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2)$  를 두 대칭 행렬  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  의 곱으로 전환한다. 유사변환을 통해 다음 식 (4)처럼 변환한다.

$$(\lambda^2 \mathbf{I} + \lambda \mathbf{T}_1^{-1/2} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}_1^{1/2} + \mathbf{T}_1^{1/2} \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1^{1/2}) \mathbf{T}_1^{-1/2} \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4)$$

식 (4)를 바탕으로 KTC 이론을 적용하여 회전속도와 관계없이 안정화될 충분 조건은 다음과 같다.

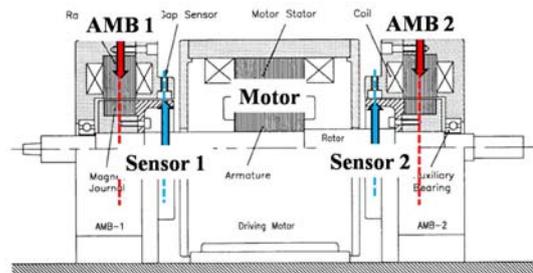


Fig. 1 Noncollocated rigid rotor-AMB system [1]

† 교신저자; KAIST 기계공학과

E-mail : freddie@kaist.ac.kr

Tel : (042) 350-3076, Fax : (042) 350-8220

\* KAIST 기계공학과

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 > 0, \mathbf{T}_2 > 0 \text{ and} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_1(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})^T > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

식 (3)의 계수 행렬에 대한 모드 정보를 이용하여 두 대칭행렬을 구한 후 [4], 식 (2)의 운동 방정식 내 상수들을 대입하면 식 (5)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{(ml_1^2 + j_d)\alpha_1 K_{p1} + (ml_2 - j_d)(1 + \alpha_2 - t_2)K_{p2}}{(ml_2 - j_d)(1 + \alpha_1 - t_1)K_{p1} + (ml_1^2 + j_d)\alpha_2 K_{p2}} > 0 \\ \{(1 + \alpha_1 - t_1)(1 + \alpha_2 - t_2) - \alpha_1 \alpha_2\} > 0 \\ \{(ml_1^2 + j_d)(1 + \alpha_1)K_{d1} + (ml_2 - j_d)\alpha_2 K_{d2}\} > 0 \\ \{(ml_2 - j_d)\alpha_1 K_{d1} + (ml_1^2 + j_d)(1 + \alpha_2)K_{d2}\} > 0 \end{aligned} \quad (6)$$

따라서 회전체 및 전자기 베어링의 설계 사양이 주어질 경우 P 와 D 계인을 변수로 하여 위 충분 조건을 만족하는 안정 영역을 구할 수 있다. 한편 첫 번째와 두 번째 조건은 P 계인에 의해서만, 세 번째와 네 번째 조건은 D 계인에 의해서만 성립되는 판별식이다.

### 3. 사례 연구

강체회전체의 관성 모멘트  $j_d$  가 충분히 작고 ( $ml_2 - j_d > 0$ ), 변위 센서가 두 전자석 구동기 사이가 아닌 바깥쪽에 위치할 경우 ( $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ) 식 (6)의 모든 조건을 자동으로 만족하므로 강체회전체와 전자기 베어링 시스템은 항상 안정하다. 따라서 전자기 베어링 설계 시 회전체의 관성 모멘트와 변위 센서의 위치를 조정함으로써 불가피한 비동위치에 의한 불안정성 가능성을 피해 제어 성능만을 고려하여 제어 계인을 설정할 수 있음을 보였다. 한편, 안정성 판별에 사용한 KTC 이론에 따르면 식 (6)의 조건 중 첫 번째, 세 번째 그리고 네 번째 조건을 동시에 만족하고 두 번째 조건을 만족시키지 못할 경우 시스템은 불안정하다는 것을 말해준다.

하지만 식 (6)은 안정성에 대한 필요 충분 조건이 아니므로 시스템을 안정화하는 제어 계인에 대해 보수적인 관점을 제공한다. 따라서 시스템을 안정화시키는 제어 계인이지만 위 조건들로는 판별할 수 없는 경우가 발생한다. 즉 그림 1 의 시스템의 경우  $\alpha_1, \alpha_2 = -0.15$  으로 음수이며 주어진 제어 계인 영역 ( $1.7 \leq K_{p1}, K_{p2} \leq 5.0, 0.0005 \leq K_{d1}, K_{d2} \leq 0.004$ )에 대해 세 번째, 네 번째 조건은 항상 만족하지만 첫 번째와 두 번째 조건을 만족하지 않는 영역이 존재하며 그림 2 에서 검은 부분과 같다. 고유치 해석을 통해 해당 영역의 제어 계인 조합 중  $K_{p1} = 4.5, K_{p2} = 2.5$  인 경우 시스템은 항상 안정하며,  $K_{p1} = 2.3, K_{p2} = 2.3$  인

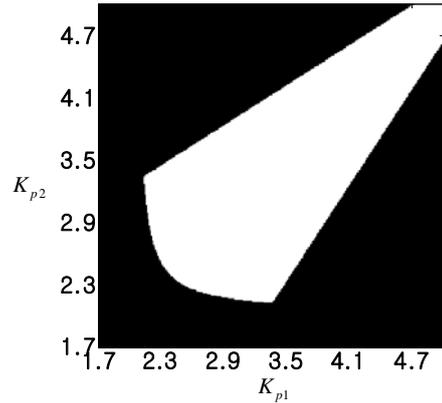


Fig. 2 Stability region with respect to P gains

경우는 불안정하다는 것을 알 수 있다. 전자의 경우 P 계인의 조합이 식 (6)의 첫 번째 조건을, 후자의 경우 두 번째 조건을 위반한다. 전자의 경우 일부 모드의 절점이 센서 부근에 존재하여 한 베어링에 대한 가제어성, 가관측성이 현저히 작아지지만 다른 베어링에 의해 제어 성능을 유지함으로써 안정성을 확보하게 된다. 반면 후자의 경우 전자석 구동기의 전자극화(pre-magnetization)에 의한 음의 변위 강성을 이겨낼 충분한 제어 입력이 주어지지 않아 불안정화된 경우라고 해석할 수 있다.

### 4. 결론

본 발표를 통해 비동위치화된 전자기 베어링에 의해 지지된 강체회전체의 PD 제어 계인에 대한 안정성을 판단하는 기준을 제시하였다. 이 방법을 통해 기존의 고유치 해석을 이용한 판단법의 단점을 극복하여 회전속도와는 관계없이 시스템이 안정한 PD 계인 영역을 보일 수 있다.

### 참고 문헌

- (1) C. S. Kim and C. W. Lee, "Isotropic Optimal Control of Active Magnetic Bearing System," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Transactions of the ASME, Vol. 118, 1996, pp. 721-726.
- (2) D. K. Miu, "Physical Interpretation of Transfer Function Zeros for Simple Control Systems with Mechanical Flexibilities," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Transactions of the ASME, Vol. 113, 1991, pp. 419-424.
- (3) D. J. Inman, "Dynamics of Asymmetric Nonconservative Systems," *Journal of Mechanics*, Transactions of the ASME, Vol. 50, 1983, pp. 199-203.
- (4) A. Bhaskar, "Tausky's Theorem and Modal Analysis revisited," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 457, pp. 2455~2480, 2001.