

강한 불완전성을 갖는 원판의 비선형 비대칭 강제진동 해석.

제 1 보 : 정상상태응답

An Analysis of Nonlinear Asymmetric Forced Vibrations of a Strongly Imperfect Circular Plate. Part 1 : Steady-State Responses

이두호 류주열 이원경†

D. H. Lee, J. Y. Ryu and W. K. Lee,

1. 서론

기존의 불완전원판의 비대칭 비선형진동 연구[1-3]에서는 원판의 변형 $w(\rho, \theta, t)$ 를

$$W(\rho)[\Psi_1(t)\cos(s\theta - \phi_1) + \Psi_2(t)\sin(s\theta - \phi_2)] \quad (1)$$

으로 가정할 때, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ 인 경우 즉, 원판의 불완전성이 절경의 위치를 변화시키지 않는 경우만 다루었다. 본 연구에서는 ϕ_1 과 ϕ_2 가 모두 0 은 아닌 경우 즉, 불완전성 때문에 절경의 위치가 변하는 경우를 연구하고자 한다. 편의를 위하여 전자를 약한 불완전성, 후자를 강한 불완전성이라고 정의하기로 한다. 식 (1)에서 W 는 축대칭모드의 고유함수 혹은 그 것의 근사표현이며 s 는 절경(nodal diameter)의 수이다. 따라서 Ψ_1 모드의 절경의 위치는

$$s\theta - \phi_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

로부터

$$\theta = \frac{\phi_1 + \pi/2}{s}, \frac{\phi_1 + 3\pi/2}{s}, \dots$$

를 얻게 되며 마찬가지로 Ψ_2 모드의 절경의 위치는

$$s\theta - \phi_2 = 0, \pi, \dots$$

로부터

$$\theta = \frac{\phi_2}{s}, \frac{\phi_2 + \pi}{s}, \dots$$

를 얻게된다.

완전원판의 경우에는 Ψ_1 모드와 Ψ_2 모드의 절경이 $\pi/2s$ 만큼 차이가 나므로, 완전원판과 불완전원판

의 두 상응 절경 사이의 각 $(\phi_1 + \pi/2 - \phi_2)/s - \pi/2s = (\phi_1 - \phi_2)/s$ 는 불완전원판의 절경특성을 말해주는데 여기서 불완전강도(strength of imperfection)라고 부르기로 한다. 완전원판의 모든 직경은 절경이 될 수 있으므로(절경의 임의성) 때문에 편의를 위하여 다양한 방식으로 (ϕ_1 과 ϕ_2 중 어느 하나를 0 이 되도록 하는 것과 같이) 좌표 θ 를 재설정할 수 있다. 좌표 θ 의 재설정이 불완전강도 $(\phi_1 - \phi_2)/s$ 를 변화시킬 수 없음은 물론이다.

2. 지배방정식

Efstathiades[4]는 불균일 원판의 비감쇠 자유진동을 지배하는 방정식에 식(1)을 대입하여 2 자유도 진동계의 방정식을 유도하였다. 여기에다가 감쇠와 가진력을 추가하면 다음의 방정식을 얻게된다.

$$\ddot{\Psi}_1 + \omega_1^2 \Psi_1 = -\varepsilon[\eta_1 \omega_1^2 (\Psi_1^3 + E_{11} \Psi_1 \Psi_2^2 + E_{12} \Psi_2 \Psi_1^2 + r_1 \Psi_1^3) + 2\mu_1 \eta_1 \omega_1^2 \dot{\Psi}_1 + \eta_1 Q_1 \cos \Omega t] \quad (2)$$

$$\ddot{\Psi}_2 + \omega_2^2 \Psi_2 = -\varepsilon[\eta_2 \omega_2^2 (\Psi_2^3 + E_{21} \Psi_2 \Psi_1^2 + E_{22} \Psi_1 \Psi_2^2 + r_2 \Psi_2^3) + 2\mu_2 \eta_2 \omega_2^2 \dot{\Psi}_2 + \eta_2 Q_2 \cos \Omega t] \quad (3)$$

여기서 비선형항의 계수는 다음과 같다.

$$E_{11} = 1 + 2\delta r_1, E_{21} = 1 + 2\delta r_2,$$

$$E_{12} = r_1 + 2\delta, E_{22} = r_2 + 2\delta.$$

여기서 r_1, r_2, δ 는 원판의 특성 즉, ϕ_1 과 ϕ_2 에 의해 결정되는 상수로서, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ 인 경우에는 모두 0 이 된다. 게다가 완전원판의 경우[5], 두 고유진동수 ω_1 과 ω_2 는 같아진다. 또한 모드 감쇠 계수(modal damping coefficient) μ_1, μ_2 를 가정하였다. 이 가정은 Yeo 와 Lee [2]의 편미분 방정식 (1a)의 감쇠계수 $\delta/2$ 가 θ 와 무관하면 충족된다. 작은 매개변수 $\varepsilon = 12(1 - \nu^2)h^2/a^2$ [1]이며 a 와 h 는 각각 원판의

† 교신저자: 영남대학교 기계공학부 첨단기계전공
E-mail : wklee@yu.ac.kr
Tel : (053) 810-2455, Fax : (053) 810-4627

반경과 두께를 나타내며 ν 는 포아송비이다.

식 (2)와 (3)에 다중 시간법을 적용하면 아래와 같이 진폭과 위상에 관한 자율 상미분방정식을 얻게 된다.

$$\dot{a}_1 = -\mu_1 \omega_1^2 \eta_1 a_1 - \frac{E_{11} \omega_1 \eta_1 a_1 a_2^2}{8} \sin 2(\gamma_1 - \gamma_2) \quad (4)$$

$$-\frac{E_{12} \omega_1 \eta_1 a_2 a_1^2}{8} \sin(\gamma_1 - \gamma_2) - \frac{3r_1 \omega_1 \eta_1 a_2^3}{8} \sin(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{\eta_1 Q_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1$$

$$a_1 \dot{\gamma}_1 = \sigma_2 a_1 - \frac{3\omega_1 \eta_1 a_1^3}{8} - \frac{E_{11} \omega_1 \eta_1 a_1 a_2^2}{8} (2 + \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2)) \quad (5)$$

$$-\frac{3E_{12} \omega_1 \eta_1 a_2 a_1^2}{8} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \frac{3r_1 \omega_1 \eta_1 a_2^3}{8} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{\eta_1 Q_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1$$

$$\dot{a}_2 = -\mu_2 \omega_2^2 \eta_2 a_2 + \frac{E_{21} \omega_2 \eta_2 a_2 a_1^2}{8} \sin 2(\gamma_1 - \gamma_2) \quad (6)$$

$$+ \frac{E_{22} \omega_2 \eta_2 a_2 a_1^2}{8} \sin(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{3r_2 \omega_2 \eta_2 a_1^3}{8} \sin(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{\eta_2 Q_2}{2\omega_2} \sin \gamma_2$$

$$a_2 \dot{\gamma}_2 = a_2 (\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{3\omega_2 \eta_2 a_2^3}{8} - \frac{E_{21} \omega_2 \eta_2 a_2 a_1^2}{8} (2 + \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2)) \quad (7)$$

$$-\frac{3E_{22} \omega_2 \eta_2 a_1 a_2^2}{8} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \frac{3r_2 \omega_2 \eta_2 a_1^3}{8} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{\eta_2 Q_2}{2\omega_2} \cos \gamma_2$$

이 식은 $a_2 = 0$ 인 해를 갖지 않는 반면, Touze 등 [1]

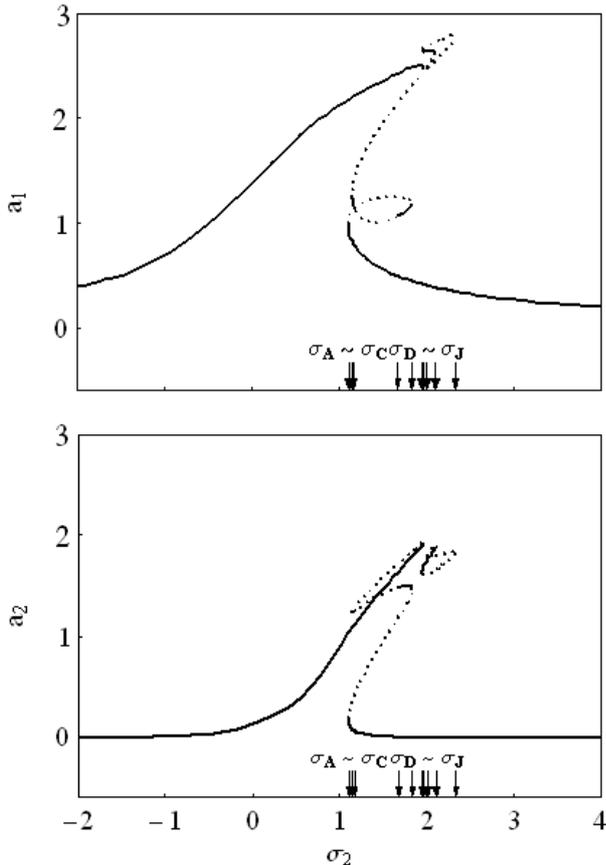


Fig. 1 Variations of the amplitudes with detuning parameter σ_2 when $\omega_1 = 2\pi$, $\eta_1 Q_1 = 10$, $Q_2 = 0$ (——, stable ; - - - - , unstable).

이 다룬, 불완전성이 약한 원판의 경우엔 $a_2 = 0$ 인 해(정상파 해: standing wave solution)를 갖는다는 점은 주목할 만 하다. 여기서 응답 Ψ_1 , Ψ_2 을 진폭 a_1, a_2 와 위상 γ_1, γ_2 으로 나타내면 다음과 같다.

$$\Psi_1(t) = a_1 \cos(\Omega t - \gamma_1) + O(\varepsilon)$$

$$\Psi_2(t) = a_2 \cos(\Omega t - \gamma_2) + O(\varepsilon). \quad (8, 9)$$

3. 수치예

수치예로서 $Q_2 = 0$ 인 경우 즉, Ψ_1 모드만 가진되는 경우를 고려하였다. 가진진동수의 변화에 따른 응답의 진폭을 알아보기 위하여 아래와 같이 정상상태의 응답곡선을 그렸다. 사용된 매개변수의 값은 $\{\varepsilon, \delta, r_1, r_2, \sigma_1, \eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2\}$

$$= \{0.001, 0.19, 0.19, 0.19, 0.5, 0.126651, 0.126651, 0.04, 0.04\}$$

이다. 여기서 실선은 안정한 응답을 점선은 불안정한 응답을 나타낸다. 위 그림에 나타난 분기점(bifurcation points)는 각각 다음과 같다.

$$\{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D, \sigma_E, \sigma_F, \sigma_G, \sigma_H, \sigma_I, \sigma_J\}$$

$$= \{1.10595, 1.15410, 1.17003, 1.67647, 1.83800,$$

$$1.94438, 1.97432, 2.0116, 2.1052, 2.33360\}$$

여기서 σ_C 와 σ_D 는 Hopf 분기이며 나머지는 saddle-node 분기이다. 이 응답곡선은 여러가지 측면에서 매우 독특한 특징을 갖고 있다. 우선은 Duffing 진동계의 응답곡선과 유사하지만 불안정한 branch 에서 안정한 branch 가 생겨난 후에 Hopf 분기로 안정성을 잃었다가 다시 Hopf 분기로 안정성을 회복하는 특징이 주목된다. 그 외에 또 하나의 안정한 branch 를 포함하는 폐곡선 해가 존재한다.

참고문헌

- [1] Touze, C. O. Thomas, O. and Chaigne, A., 2002, "Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part1 : Theory", Journal of Sound and Vibration, 258, 649-676
- [2] Yeo, M. H. and Lee, W. K., 2006, "Evidences of global bifurcations of an imperfect circular plate, Journal of Sound and Vibration, 293, pp. 138-155.
- [3] Samoylenko, S. B. and Lee, W. K., 2007, "Global bifurcations and chaos in a harmonically excited and undamped circular plate, Nonlinear Dynamics, 47, pp. 405-419.
- [4] Efstathiades, G. J., 1971, "A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using Galerkin's procedure", Journal of Sound and Vibration, 16, 231-253
- [5] Nayfeh, T. A. and Vakakis, A. F., 1994, "Subharmonic travelling waves in a geometrically non-linear circular plate", International Journal of Nonlinear Mechanics. 29, pp.233-245.