

백래시를 가진 헬리컬 기어의 비선형 동적 모델링

Nonlinear dynamic modeling of helical gear pair with backlash

박찬일†
Chan IL Park

1. 서론

이 연구는 백래시를 가진 헬리컬 기어의 비선형 모델링을 다룬다. 기어의 백래시는 윤활을 원활하게 하고 제작오차나 마모등에 의한 간섭을 제거하기 위해 설계시 부여되어야 한다. 그러나 백래시는 무부하상태나 가벼운 하중에서 치의 분리와 충격을 발생시켜 불유쾌한 기어 진동과 소음을 발생시키고 기어계의 수명에 영향을 준다. 이러한 백래시에 의한 진동과 소음의 실제적인 예는 변속기의 래틀 소음과 시트벨트와 그 밖의 기계장치에서도 발생한다.

기어계의 외적인 가진은 엔진이나 모터의 비틀림 진동에서 오는 토크의 변동이 있으며 주로 저 주파수 가진이다. 내적인 가진은 치, 축 및 베어링의 변형과 치면 오차나 수정에 의한 제작전달오차이며 고 주파수 가진을 준다. 특히 맞물리는 치의 수의 변화에 의한 치의 강성변화는 백래시와 더불어 기어계를 비선형으로 가진시키는 중요한 역할을 한다. 치의 강성 변화는 **parametrically excited system** 으로 운동방정식은 **Mathieu equation** 으로 된다.

백래시에 의한 스피어 기어의 비선형 모델링은 이미 기존 연구 논문에서 발표되고 있으나 헬리컬 기어의 모델링은 지금까지 많이 발표되고 있지 않았다. 헬리컬 기어의 모델링은 축과 베어링을 강체로 가정하고 기어를 강체원통으로 하고 치의 강성만을 고려한 일 자유도계의 비틀림 모델이 있고 이 모델에 축과 베어링의 반경방향 진동만을 고려하면 삼 자유도계 모델을 얻을 수 있으나 이 모델로는 축방향 진동을 예측할 수 없다. 기어를 강체로 하고 반경방향 진동과 축방향 진동을 모두 고려하면 12 자유도계의 운동방정식을 얻을 수 있다. 헬리컬 기어의 경우도 백래시가 비틀림 진동에 가장 중요한 역할을 하므로 이 연구에서는 먼저 일자유도계 비틀림 진동 모델에 대해 진동 특성을 검토한다.

2. 헬리컬 기어의 운동방정식

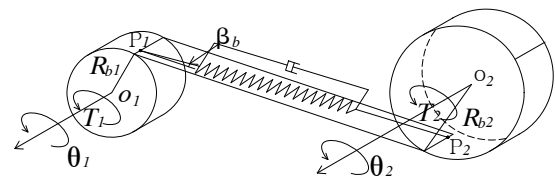


Fig. 1 Helical gear model.

헬리컬 기어의 가진은 토크의 변동, 치면의 오차, 치 강성의 주기적인 변화와 맞물림이 진행됨에 따라 치면을 따라서의 하중의 이동으로부터 온다. 치면 오차와 치 강성의 주기적인 변화를 연구하기 위해 헬리컬 기어의 일자유도 비틀림 자유도를 가진 모델을 사용한다. 이 모델에서는 축과 베어링을 강체로 가정하고 헬리컬 기어는 그림 1 과 같이 작용면을 따라 치의 맞물림 강성에 의하여 연결된 두개의 강체 원통으로 모델링한다. 이 모델링에서 백래시가 없고 치면 오차만 있을 때의 기어의 변형은 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \delta_1(t) - \delta_2(t) - e(t) \\ &= \cos \beta_b (R_{b1} \theta_1(t) + R_{b2} \theta_2(t)) - e(t). \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 δ_1 은 기어 1의 P_1 의 변위이고 δ_2 은 기어 2의 P_2 의 변위 $e(t)$ 는 치면 수정이나 치면 오차에 의한 제작전달오차이며 접촉상태에서 오차로 틈이 있는 경우 양(+)으로 한다. 이 연구에서 $e(t)$ 는 치선 수정과 리드 크라우닝을 고려하고 치의 접촉선을 따라서 전달오차 값의 평균값을 사용한다.

$$\bar{e}(t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e(t, x') dx'. \quad (2)$$

† 교신저자; 강릉원주대학교 기계자동차공학부
E-mail : pci@kangnung.ac.kr
Tel : (033) 640-2392, Fax : (033) 640-2244

기어가 2b 의 일정한 백래시를 가진다면, 치의 변형은 각 조건에 따라 다음과 같이 주어진다.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t) - b \quad \text{if } \delta(t) \geq b \\ 0 \quad \text{if } |\delta(t)| \leq b \\ \delta(t) + b \quad \text{if } \delta(t) \leq -b \end{array} \right\}. \quad (3)$$

이 조건하에서 치의 하중은 정상적인 접촉을 하는 (4-1)식과 접촉을 하지 않는 상태인 (4-2)식, 반대편 치를 접촉하는 (4-3)식으로 다음과 같이 주어진다.

$$F_G(t) = k_G(t)(\delta(t) - b) + D_G \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{if } \delta(t) \geq b, \quad (4-1)$$

$$F_G(t) = 0 \quad \text{if } |\delta(t)| \leq b, \quad (4-2)$$

$$F_G(t) = k_G(t)(\delta(t) + b) + D_G \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{if } \delta(t) \leq -b. \quad (4-3)$$

그림 1 과 같이 토크 T_1 이 기어 1 에 토크 T_2 이 기어 2 에 작용한다면 운동방정식(5)와 (6)이 얻어진다.

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = T_1 - F_G(t) \cos \beta_b R_{b1}, \quad (5)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = T_2 - F_G(t) \cos \beta_b R_{b2}. \quad (6)$$

이 두 방정식들은 수학적인 조작 후에 일 자유도 계로 줄어든다.

$$m_{eq} \ddot{x} + \cos \beta_b F_G(t) = m_{eq} (R_{b1} T_1 / J_1 + R_{b2} T_2 / J_2), \quad (7)$$

$$\text{where } x = R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2,$$

$$m_{eq} = \frac{J_1 J_2}{J_1 R_{b2}^2 + J_2 R_{b1}^2}.$$

부하 토크 T_2 가 식(8)과 같이 조정된다고 가정하면 식(7)은 식(9)와 같이 된다.

$$T_2 = R_{b2} T_1 / R_{b1}, \quad (8)$$

$$m_{eq} \ddot{x} + \cos \beta_b F_G(t) = T_1 / R_{b1}. \quad (9)$$

3. 해석결과

Table 1 Gear specification

	Pinion	Gear
Normal module	2.5	
Normal pressure angle (deg)	20°	

Center distance (mm)	150	
Helix angle (deg)	25°	
Torque(Nm)	98.1	
Average mesh stiffness(N/m)	6.7×10 ⁸	
Transmission error(m)	4×10 ⁻⁶	
Backlash(m)	100×10 ⁻⁶	
Number of teeth	19	89
Face Width(mm)	50	48
Outside diameter(mm)	59.0965	250.94
Pitch diameter (mm)	52.4105	245.50
Addendum Mod. Co.	0.3372	0.0893

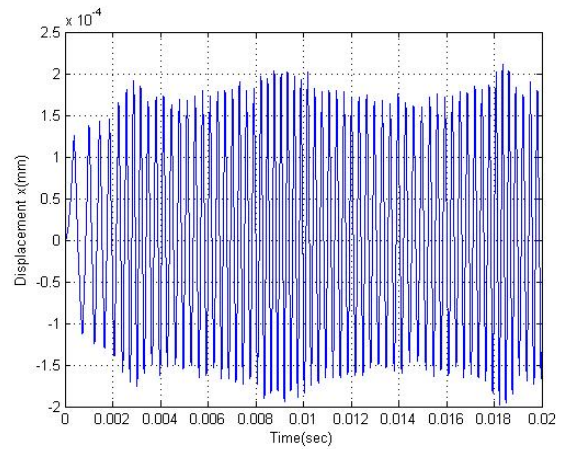


Fig. 2 Analysis results of displacement x

앞에서 유도한 식을 이용하여 수치해석방법으로 Newmark 법으로 Table 1 의 기어제원과 감쇠계수는 0.07, 초기조건으로 변위와 속도로 0 을 사용하여 해석한다. Fig.2 에 상대변위 x 의 해석 결과를 도시한다.

4. 결론

이 연구는 백래시를 가진 헬리컬 기어에 적용할 수 있는 비선형 모델링에 대해 기술하였다. 제시된 모델 중 백래시는 헬리컬 기어의 비틀림 진동에 가장 중요한 역할을 하므로 일차적으로 1 자유도 비틀림 진동의 운동 방정식을 유도하였다. 유도된 결과를 이용하여 헬리컬 기어의 수치예제를 Newmark 방법으로 해석하여 그 결과를 보였다.

후 기

이 논문은 2008 년도 정부재원(교육과학기술부 학술연구조성사업비)으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2008-521-D00026).