

유한 차분 시간 영역법을 이용한 사각판의 진동장과 그에 따른 배후 실내 공간에서의 음장 예측

Predictions of the vibration field over a rectangular plate and the resulting sound field in a cavity using FDTD method

고희연†

Hee yuen, Koh

Key Words : bending wave, time domain, sound radiation .

ABSTRACT

본 논문에서는 사각판이 고정단을 경계조건으로 가진 상태에서 충격력을 받았을 때의 굽힘과 전파와 이에 의한 음향 방사가 특정 공간에서 이루는 음장을 유한 차분 시간 영역법을 이용하여 예측하였다. 이와 같은 시도는 향후 구조물에서의 진동과 음장 사이의 관계를 해석하는데 도움이 될 수 있을 것이다. 대상 시뮬레이션 모델은 한 쪽 끝이 철판으로 이루어진 직육면체의 공간이며 예측 결과를 실험값과 비교하였다. 예측 결과는 대체로 파형과 그 특성이 실험값과 잘 일치하였으나, 감쇠 알고리즘을 주파수 대역에 따라 달리 적용하지 못하였고, 사각 평판에서 충격력의 적용 범위가 모호하여, 파형의 크기에 차이가 있었다.

1. 서 론

바닥 충격음 해석과 같이 진동하는 물체에 의한 소리를 특정구조 안에서 해석할 필요가 있을 경우 실제 물체에서 발산하는 소리를 진동과 같이 시간 영역에서 예측할 수 있다면, 소음해석에 큰 도움이 될 수 있을 것이다. 또한, 진동과 이에 의한 소리가 동시에 계산될 수 있다면, 이는 소리에 의한 구조의 진동을 예측하는 알고리즘의 토대가 될 수 있을 것이다. 이를 위해선, 시간 영역에서 소리 전파뿐만 아니라, 평판의 거동도 예측이 가능해야 한다.

평판의 진동에 대한 많은 해석 중에, 시간 영역에서 큰 성과를 거둔 것은 Chaigne 이다. 그는 실로폰과 같은 bar[1]와 L 자 모양의 평판[2]에서의 굽힘과 전파와 이에 의해 발산된 소리를 Rayleigh 적분식을 이용하여 해석 하였다. 그리고, 이를 발전시켜 기타의 진동 및 음향 특성을 시간 영역에서 예측[3]하는 성과를 거두었다. 비록 특정 모델의 특성 등을 섬세하게 계산할 수 있는 단계는 아니지만, 시간 영

역에서의 해석이 각종 악기나 특정 구조의 청감 등을 고려할 수 있는 가능성을 보여주었다.

이 외에도 다양한 조건에서 충격력에 의한 plate의 거동과 이에 대한 소리 방사가 주파수 영역에서 연구되어 왔다.

본 논문에서는 FDTD 알고리즘을 적용하여 두 개의 일차미분으로 연결된 알고리즘을 적분 없이 평판의 굽힘과 전파를 계산하고, 이에 의한 소리 방사를 비선형 질량 보존 방정식을 적용하여, 평판의 배후 공간에 대해서 계산하여 보았다.

FDTD 법을 이용하여 소리를 예측하기 위해서는 알고리즘의 특성상 음압 값만으로는 옳은 음원이 될 수 없다[4]. 이에, 기존 논문에서 계산된 값을 그대로 접목시킬 수 없다고 보고, 진동이 평판에 의한 음장 사이에 존재하는 불연속성이 음장에 주는 영향을 생각해보았다.

불연속면에서 매질과 평판이 붙어있으므로 속도 및 가속도가 같다고 볼 수 있지만, 공기의 밀도는 더 이상 선형 오일러 방정식을 유도할 때처럼 컨투

어에서 평판과 맞닿은 부분과 그렇지 않은 면에서의 공기밀도가 같다고 볼 수 없는 가정을 사용하여. 평판 근처에서의 공기 밀도 값을 계산하고 이를 평판 속도와 같이 비선형 질량 보존 방정식에 대입하여 음장을 계산하였다. 단, 이러한 비선형 식이 선형 식과 위상에서의 차이 외에 음압의 크기에서 뚜렷한 차이를 가지고 있다는 결과는 아직 발견되지 않았다.

2. 본 론

2.1 평판

(1) 지배 방정식

평판의 굽힘과 전파를 계산하기 위한 kirchhoff 방정식은 아래와 같다[5]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \nabla^4 w = \frac{P_y(x, z)}{D}. \quad (1)$$

w 는 평판에 수직 방향으로 생기는 변위, P_y 는 평판에 수직방향으로 가해지는 가중이며, D 평판이 가지는 물성치 이다. 이 방정식은 평판의 수직 속도 v_y , 각속도 w , 모멘트 $M_{xx}, M_{yy}, M_{yz}, M_{xz}$ 그리고 전단력 q_x, q_y 으로부터 유도된다. FDTD 법이 사용하는 leap frog algorithm 의 특성 상, kirchhoff 방정식을 풀기 위해선 이를 유도하는 방정식들을 이용하여 알고리즘을 만들어야 했다. 이에 kirchhoff 방정식을 구성하는 미분 방정식들로 이들을 계산식으로 풀어 쓴 식들은 다음과 같다[2]:

$$w_x = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad (2a, b)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -B \frac{\partial w_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial t} = -B \frac{\partial w_x}{\partial z}, \quad (3a, b)$$

$$\frac{\partial M_{zx}}{\partial t} = -B \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial M_{xz}}{\partial t} = -B \frac{\partial w_x}{\partial x}, \quad (4a, b)$$

$$q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{zx}}{\partial z}, \quad q_z = \frac{\partial M_z}{\partial x} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial z}, \quad (5a, b)$$

$$-\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{m} \left\{ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\} = \frac{P_z}{m}, \quad (6)$$

$$B = E \frac{h^3}{12}. \quad (7)$$

E 는 Youngs 계수, Δh 은 한 격자의 크기, h 는 평판 두께이다. 같은 kirchhoff 방정식을 이용해 시간영역에서 평판의 진동해석을 한 Chaigne 의 알고리즘과 다른 점은 변위 w 의 이차 미분을 그대로 풀던 것과 달리, 변위와 모멘트의 일차 미분으로 나누고 test function 과의 적분 없이 계산식을 구성한 점이다. 이 차이에 의한 장단점은 추후 더 연구가 필요할 것으로 보인다.

(2) Impact source

평판에 가해지는 충격력은 Chaigne 이 impact theory 에서 유도한 식을 사용하였다[2]:

$$f(x, y, t) = g(x - x_0, y - y_0) F_H(t),$$

$$F_H(t) = \begin{cases} [(W(x_0, y_0, t) - W_i(t)) / k_H]^{3/2} \\ \text{if } W_i(t) < W(x_0, y_0, t), \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}, \quad (8)$$

여기서 $g(x - x_0, y - y_0)$ 는 spatial window 로 Gaussian pulse 를 사용하였다. F_H 는 계산된 충격력, $W(x_0, y_0, t) - W_i(t)$ 는 충돌체와 평판의 상대 변위, k_H 는 Hertz 상수, m_i 는 충돌체의 무게이다.

(3) CFL 조건

CFL 은 계산 결과가 발산하는 것을 막기 위한 격자 크기에 대한 조건이다. 격자 크기 Δh 는 Δt 동안 굽힘파가 전파되는 길이보다 작은 값을 가져야 한

다:

$$\Delta h < \frac{c_{bending} \Delta t}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

이 때, 굽힘파의 경우 주파수가 증가함에 따라 전파 속도도 증가하므로, 가해지는 충격력에 의해 가진 되는 주파수 범위에 따라서 적절한 Δh 를 사용하여 한다. 주파수 별 굽힘파의 전달 속도 $c_{bending}$ 는 다음과 같다:

$$c_{bending} = \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \sqrt{\omega}, \quad (10)$$

$$m' = \rho_{steel} S. \quad (11)$$

여기서 S 는 넓이고, ρ_{steel} 는 철판의 밀도이다.

(4) 경계 조건

경계조건은 사각 평판의 사변에 대해 고정단을 사용하였고 이에 대한 조건은 아래와 같다:

$$v_{y|boundary} = 0, \quad (12)$$

$$w_{|boundary} = 0. \quad (13)$$

2.2 음장

(1) 지배 방정식

철판과 맞닿아 있는 경계에 존재하는 비연속성의 영향을 계산하기 위하여 기존의 FDTD 법은 선형 파동 방정식을 구성하는 선형 오일러 방정식과 선형 질량 보존 방정식 대신에 알고리즘 특성상 평판 근처의 계산을 비선형 질량 보존 방정식을 경계 부분의 격자들에 한하여 사용하였다.

평판 근처에서의 매질이 평판과 수직 속도 방향의 속도와 가속도를 공유한다고 하면, 공기 입자의 가속도는 평판의 가속도에 의해 결정되고, 컨투어의

한쪽 끝의 음압 값은 시뮬레이션 상에서 이미 정해져 있으므로, 평판 바로 근처에서의 음압은 이 두 값에 의해 계산될 수 있다.

이를 위한 Euler 방정식은 아래와 같다:

$$\rho_0 a_n = -\nabla p. \quad (14)$$

ρ 는 공기 밀도, a_n 는 철판 가속도, 시간은 t , p 는 음압이다

위 식에 의해 평판 바로 근처에서의 음압값을 계산하게 되면 이를 다음 식에 대입하여 상응하는 공기 밀도를 알 수 있다:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{B} \right), \quad (15)$$

여기서 ρ 는 공기 밀도, ρ_0 는 평균적인 공기 밀도, p 는 음압, B 는 bulk modulus이다.

식 (15)에서 구해진 밀도 값은 비선형 질량 보존 방정식에서 사용하였다. 이를 위한 지배 방정식과 계산식은 아래와 같다:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (16)$$

음장에 대한 CFL 은 이미 음파 속도가 철판의 굽힘파 전파 속도보다 빠르지 않기 때문에, 식 (9)에 대해 만족하므로 생략한다.

(2) 경계 조건

계산에서 사용된 벽면 반사 계수 값은 주파수 영역에서 변하지 않는다는 것이다. 비록 IIR 필터를 이용하여 시간 영역 유한 차분법의 벽면 반사 계수를 주파수에 따라 다른 값을 줄 수 있지만, 실측 모델의 내부 공간에서의 표면이 철판으로 둘러져 있으

므로, 이번 계산에서는 주파수 영역에 따라 달라지는 벽면 반사 계수 값을 고려하지 않았다:

$$u_n = \frac{P_{boundary}}{Z}, \quad (20)$$

$$Z = \rho c \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}. \quad (21)$$

2.3 알고리즘

계산 알고리즘은 그림 1와 같다. 평판 진동 계산은 굽힘과 방정식을 구성하는 방정식들을 이용한다. 이 과정이 끝나면 여기서 얻어진 평판의 수직 속도 분포를 이용하여 평판 근처의 공기 입자 속도와 밀도 값을 계산하고 이를 비선형 오일러 방정식에 대입한다.

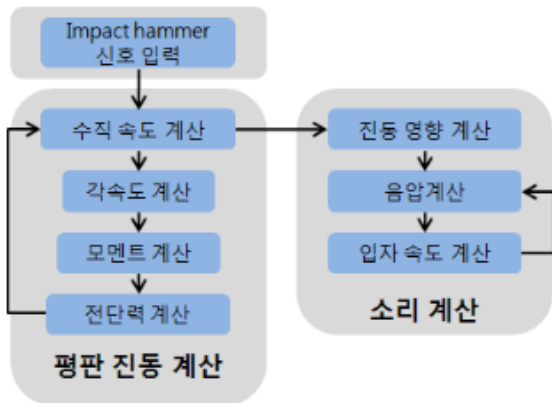


그림 1. 알고리즘 순서도

여기서 얻어진 결과는 본래 사용되는 선형 질량 보존방정식과 선형 오일러 방정식을 통하여 공간 내에서의 소리 분포를 알 수 있다.

3 시뮬레이션 모델 및 실험

3.1 시뮬레이션 모델

시뮬레이션 및 측정 모델은 그림 2와 같다. 사각

판은 강철로 가로 0.5m, 세로 0.5m 이고 두께는 1mm이다. 사각판에 연결된 공간은 1.5m 의 길이를 가지고 있다. 내부 공간은 모두 강철로 처리되어 있다.

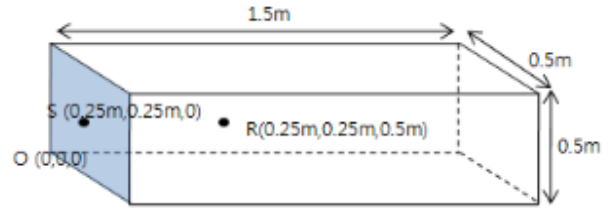


그림 2. 시뮬레이션 모델

3.2 시뮬레이션 조건

철판의 밀도는 7700kg/m^3 , 푸아송 비는 0.28, 강성은 195GPa 을 사용하였다. 경계에서 사용된 반사 계수 값은 0.95 으로 하였다 시뮬레이션 시 사용한 공간 간격은 1cm, 시간 간격은 0.01ms 이다. 감쇠 알고리즘에 사용한 상수는 0.00008 이고, 충격력을 입력하기 위해 사용한 Hertz 상수는 $9 \times 10^{-6} \text{mN}^{-2/3}$ 이다. 충격력 신호는 충돌하는 물체의 변위가 gabor pulse 와 같다고 보고 $W_i(t)$ 를 계산하였다.

이 때, 임팩트 해머에 의해 측정된 충격력의 최고 값은 12N 으로 $W_i(t)$ 를 두 번 미분한 값을 기반으로 계산한 임팩트 해머의 힘과 식 (8) 중에서 어느 값이 이 최고값과 같아야 하는 지는 좀 더 고려할 필요가 있다.

3.3 측정

임팩트 해머로 가진한 지점은 사각판의 정중앙이고, 중앙에서 가로, 세로로 10cm씩 떨어진 부근에서 진동을 LDV로 측정하였다. 음압은 내부 공간에서 철판으로부터 50cm 떨어진 곳의 정중앙에서 측정하였다.

4. 결과

측정값과 비교한 결과는 그림 3, 4 와 같다. 크기 비교를 용이하게 하기 위하여 최고치를 모두 1로 맞추었다. 피크 값은 입력 신호를 입력할 때, 적용 넓이에 비례해서 달라진다. 이에 관해서는 고찰에서 더 자세히 다루도록 하겠다.

굽힘파와 소리 파면의 도착시간이 0.2 초간 측정치와 일치하고 있고, 상대적인 파면의 크기 감소도 측정값과 비슷한 경향을 보임을 확인할 수 있다.

굽힘파와 소리 파면의 도착시간이 0.02초간 측정치와 일치하고 있고, 상대적인 파면의 크기 감소도 측정값과 비슷한 경향을 보임을 확인할 수 있다.

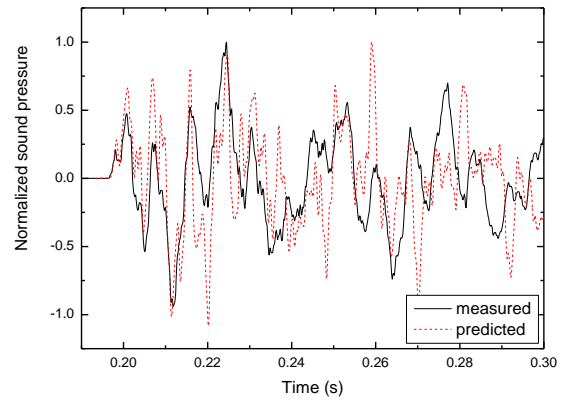
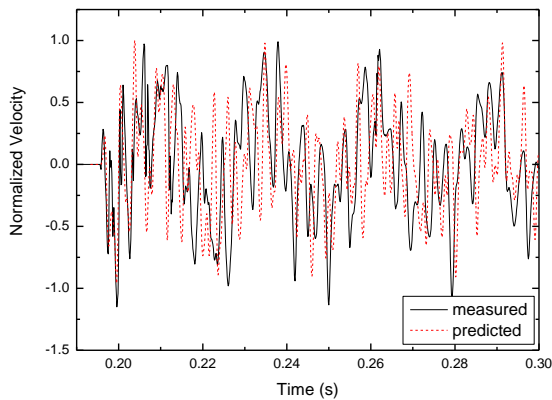
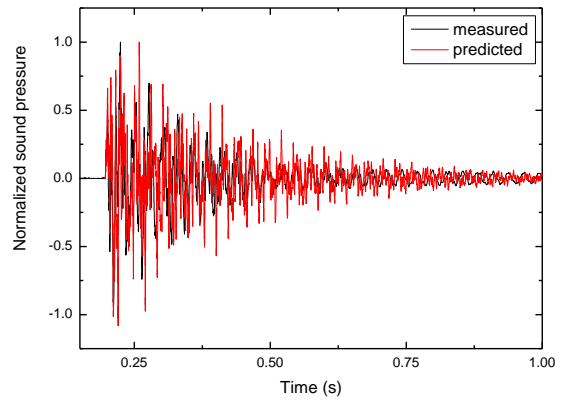
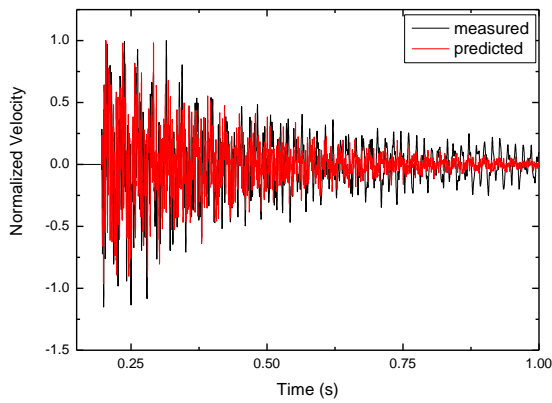


그림 3. 진동 측정 및 예측 결과

그림 4. 음압에 대한 측정 및 예측 결과

5. 결론 및 고찰

예측치의 오차 원인으로서는 계산 에러 이전에, 신호의 적용 넓이와 감쇠 효과를 위해 적용된 입력 알고리즘에 사용한 지배 방정식을 들 수 있다.

여기서 크기에 직접적인 영향을 부는 것은 입력 신호의 적용 넓이로, 넓은 범위에 대해서 적용될수록 계산 값은 넓이에 따라 파형도 조금씩 달라진다. 파형의 크기는 3.2에서 언급한 충격력의 크기에 따라서 결과가 달라진다.

식 (16) 와 같은 비선형 식에 의한 효과는 평판의 진동 값의 크기에 의존하기 때문에, 파형의 크기에 대한 고찰과 함께 결론을 내릴 수

있을 것으로 보인다. 즉, 평판의 변위가 작을 경우 식 (15)의 bulk modulus의 영향으로 공기 밀도가 크게 달라지지 않기 때문에, 비선형과 선형식의 차이가 크지 않게 되기 때문이다.

감쇠율의 경우, 주파수에 따라 값이 변해야하지만, 본 논문에서는 상수값으로 대체하였기 때문에 고주파 대역에서의 감쇠가 적게 나타난 것으로 보여진다.

참 고 문 헌

(1) A. Chaigne and V. Doutaut , 1997, “ Numerical simulations of xylophones. I. Time-domain modeling of the vibrating bars” , J. Acoust. Soc. Am., Vol. 101,pp.539~557.

(2) C. Lambourg, A. Chaigne and D. Matignon, 2001, “ Time-domain simulation of damped impacted plates.II. Numerical model and results” , J. Acoust. Soc. Am., Vol. 109,pp.1433~1447.

(3) G. Derveaux et al., 2003, “ Time-domain simulation of a guitar: Model and method, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 114 ,pp.3368~3383.

(4) Hee-yuen Koh et al, 2008, "Source and boundary condition of FDTD method” , proceedings of the ASK Spring Conference, CD-ROM.

(5) Rudolph Szilard, 1973, Theory and analysis of plates: classical and Numerical methods, Princeton Hall, New York.