

# 베어링에 지지되어 평면운동하는 치차의 동해석에 관한 연구

## Dynamic analysis for the spur gear supported the bearing with the planar motion

정진태† · 김우형\*  
Jintai Chung and Woohyung Kim

### 1. 서론

기어 구동장치는 동력 전달을 주요 목적으로 로봇, 자동화 설비, 자동차, 선박, 항공기 등의 많은 분야에 걸쳐 사용되고 있다. 특히 요즘에는 산업의 발달로 인해 극한 상황에서의 동력전달이 요구되며, 이전 보다 더욱 가혹한 조건에서 정밀한 상태가 요구되고 있는 실정이다. 정밀한 구동이 요구되는 조건에서 치차에서 발생하는 동적 특성은 시스템의 주요 거동 특성이 되므로 많은 연구자들이 평치차의 동적 거동 특성에 대하여 연구하였다.

본 논문에서는 평치차의 동특성을 분석하기 위해서 치차 구동부와 베어링의 지지 구조를 갖는 해석 모델을 구성하였다. 베어링의 강성 특성 때문에 발생하는 치차의 물림 특성을 방정식에 적용하였다. 구성된 방정식의 수치 적분을 통해 이전 치차의 동특성 모델과 새로 구성된 치차의 동특성을 비교 분석하였다.

### 2. 평치차 모델

#### 2.1 평치차 해석 모델

본 연구에서는 기어의 동특성을 분석하기 위해 Fig. 1 과 같이 해석 모델을 구성하였다. 시스템의 구성은 기어와 피니언으로 구분되는 두개의 평치차와 각 치차를 지지하는 베어링, 동력을 전달하는 축으로 이루어져있다. 치차 시스템은 평면에서만 운동을 한다고 가정하고 외부 토크와 각 치차의 병진운동 및 회전운동, 치차 물림에 의해 발생하는 변동물림 강성을 고려하였다.

##### (1) 운동방정식

평치차 시스템의 모델은 회전운동과 병진운동에 관련한 6 개의 자유도를 가진다. 기어와 피니언이 가지는 자유도에 따라  $x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2$  와 같

이 정의하였다. 첨자의 1, 2 는 구동 기어와 피동 기어를 의미한다. 6 자유도를 갖는 평치차 시스템의 운동에너지와 위치에너지는 식(1), (2)와 같이 정리할 수 있다. 치차의 회전에 대한 베어링 감쇠력의 영향은 식(3)와 같이 정리되고, 외부 입력 토크에 의한 일은 식(4)와 같이 정리하였다.

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2}k_b(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}k_b(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}k_m\delta^2 \quad (2)$$

$$F = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 \quad (3)$$

$$\delta W = T_1\delta\theta_1 + T_2\delta\theta_2 \quad (4)$$

$m_1, m_2, I_1, I_2$  는 각 치차의 질량과 질량 관성 모멘트이고  $r_{b1}, r_{b2}$  는 기초원반지름이다.  $k_b, k_m$  은 베어링과 치차 물림 강성이고,  $T_1, T_2$  는 치차의 토크,  $C_1, C_2$  는 베어링의 회전 감쇠 계수이다.  $\delta$  는 치차 운동에 따라 물림부에서 발생하는 변형량을 정의한 것이다. 이 값은 회전운동과 병진운동의 크기에 따라 결정된다.

##### (2) 치차 물림 변위

평치차의 동적 특성을 규명하기 위해서 물림 특성을 변동 강성과 물림 변위를 통해 정의 하였다. 기존의 평치차에 대한 많은 논문에서 평치차의 물림변위를 식(5)과 같이 정의 하였다. 이는 구동기

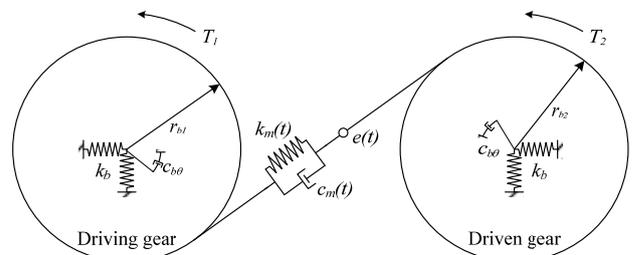


Fig. 1 Modeling for spur gear

† 교신저자; 한양대학교 기계공학과  
E-mail : jchung@hanyang.ac.kr  
Tel : (031) 400-5287, Fax : (031) 406-6964  
\* 한양대학교 일반대학원 기계공학과

어와 피동기어의 일반좌표의 운동을 좌표변환을 통해 작용선 위의 변위로 변환하였다. 식 (5)의 물림 변위는 압력각이 일정한 상태에서 정의된 수식으로 만약 압력각이 변하게 되면 이를 수식에 고려 되어야 한다.

$$\delta = (x_2 - x_1) \sin \alpha + (y_2 - y_1) \cos \alpha + r_{b1} \theta_1 + r_{b2} \theta_2 \quad (5)$$

베어링의 지지를 받고 있는 평치차는 평면 운동을 하기 때문에 두 치차의 축간 거리의 변화가 발생하게 된다. Fig. 2는 두 치차의 축간거리  $C$ 가  $C'$ 로 변하게 될 때 압력각이  $\alpha$ 에서  $\alpha'$ 로 변하는 것을 보여준다.

치차의 병진운동에 의해 축간 거리가 변하게 되므로 운동방정식의 물림 변위의 압력각  $\alpha$ 는  $\alpha = \alpha(x_1, y_1, x_2, y_2)$ 로 표현되며 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

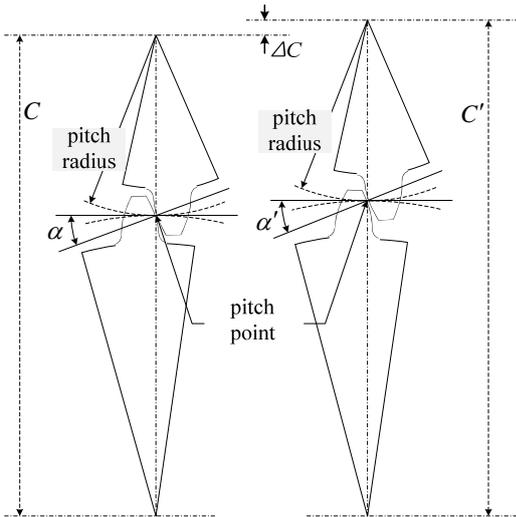
$$\alpha = \cos^{-1} \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\sqrt{(c_0 + x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (6)$$

치차의 병진 운동을 고려하여 물림 변위를 정의하기 위해서 두 치차 사이의 각  $\psi$  또한 압력각과 동일하게  $\psi = \psi(x_1, y_1, x_2, y_2)$ 로 표현되며 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\psi = \tan^{-1} \frac{y_2 - y_1}{c_0 + x_2 - x_1} \quad (7)$$

$c_0$ 는 치차의 설계 당시에 고려되는 초기 위치의 축간 거리이다.

치차의 병진운동을 고려하여 물림 변위를 정의할 때 기존의 물림 변위의 표현 식에 압력각과 두



(a) Correct center distance (b) Increased center distance

Fig. 2 Pressure angle change because of the center distance variation

치차의 사잇각을 고려하여 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta = (x_2 - x_1) \sin(\alpha - \psi) + (y_2 - y_1) \cos(\alpha - \psi) + r_{b1} \theta_1 + r_{b2} \theta_2 \quad (8)$$

치차의 물림 변위 (8)을 (1)-(4)에 적용하여 치차의 비선형 운동방정식을 구성할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + \{N\} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$[M]$ 는 질량 행렬이며,  $\{N\}$ 는 비선형 벡터이다.

### 3. 시간응답해석

#### 3.1 수치해석

앞에서 얻어진 운동방정식은 물림 변형량의 정의를 통하여 비선형 형태를 갖는다. 비선형 시스템의 응답을 얻기 위하여 시간적분법인 Newmark Method와 Newton-Raphson method를 적용하여 시스템의 동적 응답을 해석하였고, Fig. 3과 같은 시간에 따른 물림 변형량의 결과를 얻을 수 있었다.

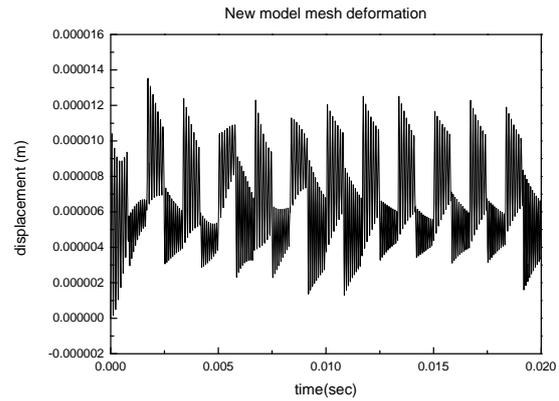


Fig. 3 Mesh Deformation of 6-degree-of-freedom

### 4. 결론

본 연구에서는 평치차 쌍을 해석 모델로 하고 각 치차의 회전 운동과 병진 운동, 변동 물림 강성, 베어링의 회전 감쇠효과 등을 고려하여 시스템의 동적 해석을 수행하였다. 평치차 시스템의 운동 방정식을 유도하고 비선형 해법을 통한 수치 해석을 수행하였다. 해석 결과를 분석하기 위하여 회전 운동만을 고려한 시스템의 응답과 비교 분석하였다. 시스템의 운동을 보여주는 각 자유도의 위치와 속도에 대한 시간 응답을 통하여 운동 특성을 확인하였다. 또한, 치차 시스템의 특성인 두 치차 사이에 발생하는 물림 변형의 시간 응답을 도출하여 그 결과를 비교하고 병진 운동의 영향력에 대한 평가를 수행하였다.