

# 샘플 추출방법에 근거한 비선형 진동계의 성능 불확실성 예측

## Performance Uncertainty Estimation of a Nonlinear Vibration System Based on a Sampling Method

최찬규\* · 유흥희†  
Chan Kyu Choi and Hong Hee Yoo

**Key Words :** Variation Analysis(산포해석), Sampling Method(샘플 추출방법), Nonlinear Vibration System(비선형 진동계), Confidence Interval(신뢰구간), Frequency Response Function(주파수 응답함수)

### ABSTRACT

A designer regards the vibration system as a linear system. However, in real world, nonlinearity of a vibration system should exist caused by various factors like manufacturing conditions or uncertain material properties. So, properties of a spring and a damper which are consisting the vibration system have statistical distribution. Therefore, a designer needs to analyze the statistical nonlinearity in a vibration system. In this paper, 1<sup>st</sup> Taylor series expansion method and univariate dimension reduction method apply to a performance measure of nonlinear vibration system, and compare each result. And then, merits and demerits of each method are discussed. For apply more actual problem, a performance measure population is estimated based on design variable samples like properties of spring or damper.

### 1. 서 론

설계자는 통상 진동계 설계 시 그 진동계가 가지는 비선형성(nonlinearity)에 대하여 고려하지 않는다. 하지만 실제 진동계는 그것을 구성하는 부품의 제조 상태나 재료의 특성 때문에 비선형성이 존재하며 이 비선형성은 진동계 성능에 좋은 영향을 줄 수도, 나쁜 영향을 줄 수도 있다. 예를 들어 선박엔진이나 차량엔진의 경우 시동을 거는 경우에는 엔진의 가진 주파수(excitation frequency)가 0Hz 부터 정상상태에 도달할 때까지 증가하며, 시동을 끄는 경우에는 정상상태로부터 0Hz 까지 가진 주파수가 감소한다. 이때 가진 주파수가 그 진동계의 고유진동수(natural frequency) 근처에 가면 공진(resonance)이 일어나며 진폭(amplitude)이 매우 커져 문제가 될 수 있다. 본문에서 언급하겠지만 진동계에 비선형성이 존재할 때 비선형비에 따라서 공진 진폭이 커질 수도, 작아질 수도 있다. 그리고 이 비선형성은 제조 상태나 재료의 특성이 일정하지 않기 때문에 통계적 분포(statistical distribution)를 띄게 된다. 그리고 진동계를 구상할 때 댐퍼(damper) 또한 설계 목표치에 맞는 정확한 제조가 힘들어 통계적 분포를 띈다. 따라서 진

동계 설계 시 비선형성뿐만 아니라 댐퍼의 불확실성(uncertainty)에 의한 진동계 성능의 불확실성을 해석하고 반영하여야 한다.

현재의 설계변수의 불확실성에 의한 계의 불확실성을 해석하는 산포해석기법은 크게 2 가지로 분류된다. 첫 번째는 시뮬레이션 방법(simulation method)이고 두 번째는 고전적인 해석적 방법(classical analytical method)이다. 시뮬레이션 방법에는 대표적으로 몬테카를로 방법(Monte Carlo Method; MCM)이 있다. 시뮬레이션 방법은 무수한 추출 점에서의 해석을 수행하기 때문에 비교적 정확하지만 복잡한 계에 대해서는 매우 비효율적이다. 따라서 보다 효율적인 방법이 요구되어 해석적 방법이 발전되어 왔다. 해석적 방법을 이용한 산포해석을 위해서는 계의 응답 함수와 설계변수들의 결합 확률 밀도 함수(joint Probability Density Function; joint PDF)를 적분영역에서 다중적분 해야 한다. 그러나 다중적분은 매우 어렵기 때문에 근사적으로 적분하는 방법이 연구되었고, 그 중 대표적인 근사 적분법으로 테일러 급수 전개 방법(Taylor expansion method)<sup>(1)</sup>, 뉴만 전개 방법(Newmann expansion method) 그리고 분해법(decomposition method)을 사용하는 차원 감소법이(Dimension Reduction method; DR)<sup>(2)</sup> 있다.

하지만 기존의 산포해석에 대한 연구는 설계변수의 모수(statistical parameter)를 필요로 하였다. 그러나 실제활용에 있어서 설계변수의 전수조사(complete enumeration)가 힘들기 때문에 모수는 알 수 없다. 따

† 교신저자; 한양대학교 기계공학부  
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr  
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070  
\* 한양대학교 대학원 기계공학과

라서 설계변수 모집단(population)에 대해서 표본추출(sampling)하고, 그 표본(sample)을 이용하여 성능척도(performance measure) 모집단을 예측(estimation)하는 방법이 제시 되었다.

본 연구에서는 비선형 진동계의 성능척도를 정의하고 설계변수의 산포가 성능척도의 산포에 미치는 영향을 분석하기 위해 몬테카를로 방법, 1 차 테일러 급수 전개 방법 그리고 차원 감소법을 사용하였고 그 방법들의 장단점을 비교하였다. 그리고 설계변수 표본을 이용한 성능척도의 모수를 예측하였다.

## 2. 비선형 진동계의 성능 척도

### 2.1 1자유도 비선형 진동계의 운동방정식

본 연구에서 사용한 1 자유도 비선형 진동계(nonlinear vibration system)는 Fig.1 과 같다. 여기에서 사용된 비선형성을 가지는 요소는 비선형 스프링(nonlinear spring)이다. Fig. 2 에서 보는 바와 같이  $k_1 < 0$  인 경우를 연화 스프링(softening spring),  $k_1 > 0$  인 경우를 경화 스프링(hardening spring)이라 한다.<sup>(3)</sup>

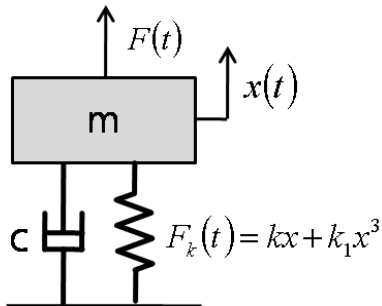


Fig. 1 A spring-mass-damper system with potentially nonlinear element

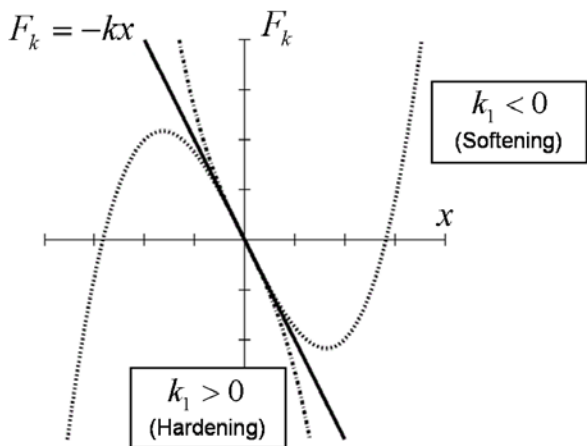


Fig. 2 Force diagram for nonlinear spring

Fig. 1 에서 나타낸 시스템에 조화가진(harmonic excitation)을 주고 운동방정식을 세우면 식 (1)과 같다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_1x^3 = F_0 \sin \omega t \quad (1)$$

이 운동방정식을 무차원화된 운동방정식으로 변환시키기 위해 다음과 같은 식 (2)의 무차원 매개변수 및 변수들을 정의한다.

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}}, \quad \alpha = \frac{k_1}{k^3} \frac{F_0^2}{l}, \quad \theta = \frac{x}{l} \quad (2)$$

$$l = \frac{F_0}{k}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{1}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

식 (2)의 무차원 매개변수 및 변수를 이용하면 식 (3)과 같은 무차원화된 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\dot{\theta} + \theta + \alpha\theta^3 = \sin r\tau \quad (3)$$

여기서  $\theta$ 는 무차원화된 변위,  $\zeta$ 는 감쇠비,  $\alpha$ 는 비선형비,  $r$ 은 주파수비 그리고  $\tau$ 는 무차원화된 시간이다.

### 2.2 주파수 응답 함수

비선형 진동계의 진동 특성은 주파수 응답 함수(Frequency Response Function; FRF)를 보면 알 수 있다. 선형 진동계와는 다른 비선형 진동계의 진동특성은 하나 이상의 평형점을 가지며 그 평형점은 안정하거나 불안정할 수 있다. 그리고 비선형 시스템에서는 정상상태 거동이 항상 존재하는 것은 아니고 해의 성질이 초기조건(initial condition)에 의해 크게 좌우된다. 또한, 비선형 진동계에서 공진은 선형계의 고유진동수와 다른 가진 주파수에서도 일어날 수 있다는 것이 일반적으로 알려져 있다.

본 연구에서 사용된 비선형 진동계의 주파수 응답 함수는 식 (4)와 같다.<sup>(4)</sup>

$$r^2 = 1 - 2\zeta^2 + \frac{3}{4}\alpha C^2 \pm \sqrt{\frac{1}{C^2} + 4\zeta^2 \left( \zeta^2 - 1 - \frac{3}{4}\alpha C^2 \right)} \quad (4)$$

Fig. 3 은 비선형 진동계의 주파수 응답함수이다. Fig. 3 에서 보면 비선형비가 음수인 경우 선형 시스템에 비해 진폭의 피크 값(peak value)이 커짐을 알 수 있다. 또한 비선형 시스템의 특징인 특정 주파수비에서는 단일 평형점을 가지지 않고 2 개 또는 3 개의 평형점을 가짐을 확인할 수 있으며, 비선형성이 있는 경우 선형 진동계의 고유진동수와 다른 가진 주파수에서 공진이 일어나는 현상도 확인할 수 있다.

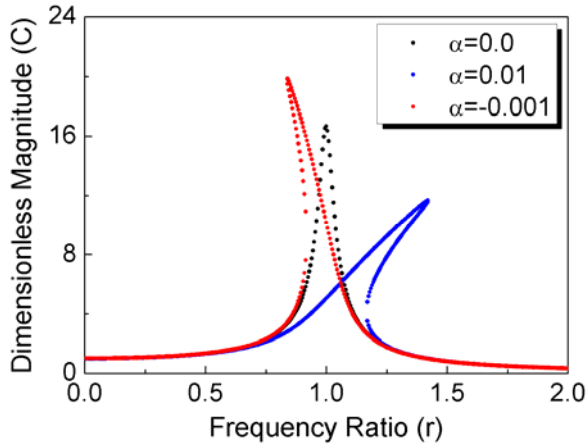


Fig. 3 Frequency response function of the nonlinear system

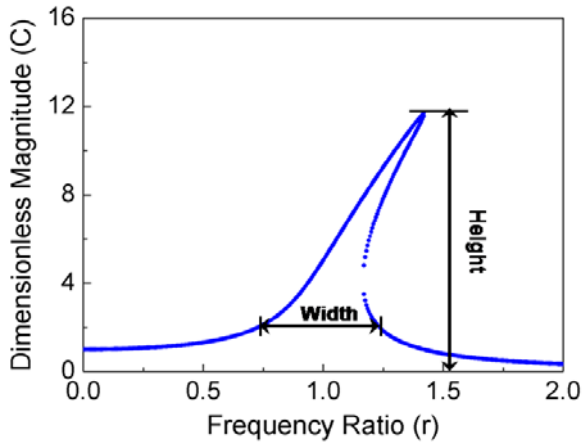


Fig. 4 Width and height for performance measure

### 2.3 성능 척도

일반적으로 진동계에서 공진현상은 일어나지 않는 것이 좋는데 예를 들면 선박이나 차량의 엔진 같은 경우 공진이 일어나면 매우 좋지 않다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 비선형 진동계의 경우 비선형비가 음수이면 선형계에 비해서 피크 값이 커지며, 양수이면 피크 값이 작아지는 경향을 나타내는 특징을 이전에서 확인하였다. 피크 값이 커지게 되면 진폭이 커져 운전자로 하여금 불편을 느낄 수 있어 좋지 않다. 그리고 불편함을 느끼는 일정 진폭 이상이 되는 주파수비의 범위는 좁을수록 좋을 것이다. 따라서 비선형 진동계의 성능척도로써 본 연구에서는 식 (5)와 같이 무차원화된 진폭이 2 이상 되는 주파수비의 범위와 무차원화된 진폭의 피크 값의 곱으로 정하였다.

$$\text{Performance Measure} = \text{Width} \times \text{Height} \quad (5)$$

피크 값을 구하기 위해서 식 (4)를 주파수비에 대해서 직접 미분하면 식 (6)과 같다.

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{9}{2}\alpha C^2\sqrt{D} + 2\sqrt{D}(1-2\zeta^2-r^2) \\ \pm 8\zeta^2 C \left( \zeta^2 - 1 - \frac{3}{4}C^2 \right) - 6\zeta^2 C^3 \end{array} \right] \frac{dC}{dr} = 4rC\sqrt{D} \quad (6)$$

$$\text{where, } D = 1 + 4\zeta^2 C^2 \left( \zeta^2 - 1 - \frac{3}{4}\alpha C^2 \right)$$

식 (6)에서 기울기가 0 이 되는 곳을 찾으면 식 (7)이 되고, 피크 값을 구할 수 있다.

$$1 + 4\zeta^2 C^2 \left( \zeta^2 - 1 - \frac{3}{4}\alpha C^2 \right) = 0 \quad (7)$$

### 3. 산포해석 기법.

본 연구에서는 몬테카를로 방법, 1 차 테일러 급수 전개 방법 그리고 차원감소법을 산포해석기법으로 사용하였다. 몬테카를로 방법은 매우 많은 표본에서의 해석을 필요로 하기 때문에 비교적 정확하지만, 표본 수만큼의 해석을 요구하기 때문에 복잡한 시스템이라면 그 효율성이 크게 떨어진다. 1 차 테일러 급수 전개 방법은 설계변수에 대한 계의 반응함수(response function)를 테일러 급수 전개를 이용, 설계변수 평균을 중심으로 선형으로 근사화하여 성능척도의 산포를 구하는 방법이다. 그리고 차원감소법은 가법 분해법을 사용하여 다중 적분식을 단일 적분식의 합으로 근사화 하여 성능 척도의 산포를 구하는 방법이다.

해석적 방법을 위해 각 설계변수들의 확률변수 벡터는  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}^T \in \mathbb{R}^N$ , 계의 반응함수를  $Y(\mathbf{X})$ 로 표현하면 계의 반응함수에 대한  $l$ 번째 통계적 모멘트(statistical moment)  $m_l$ 은 식 (8)과 같다.<sup>(5)</sup>

$$m_l = E\{Y^l(\mathbf{X})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} Y^l(\mathbf{X}) \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (8)$$

여기서  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = f_{X_1, \dots, X_N}(X_1, \dots, X_N)$ 는  $\mathbf{X}$ 에 대한 결합 확률 밀도 함수이며,  $E$ 는 기대값(expectation)을 나타내는 기호이다. 이 통계적 모멘트를 이용하여 계의 반응함수의 평균(mean)과 분산(variance)을 식 (9)과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E\{Y(\mathbf{X})\} &= m_1 \\ \text{Var}\{Y(\mathbf{X})\} &= m_2 - m_1^2 \end{aligned} \quad (9)$$

하지만 다중적분을 하는 일은 쉽지 않다. 이러한 어려움을 개선하기 위하여 계의 응답함수  $Y(\mathbf{X})$ 를 근사화 하여 적분을 수행하는 다음과 같은 방법들이 제시되었다.

### 3.1 1차 테일러 급수 전개 방법

1차 테일러 급수 전개 방법은 시스템의 응답함수  $Y(\mathbf{X})$ 를 산포를 가지는 설계변수의 평균점에서 테일러 급수 전개, 1차항까지만 사용함으로써  $Y(\mathbf{X})$ 를 근사화하는 방법이다.  $Y(\mathbf{X})$ 를 설계변수 평균  $\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}$ 에서 테일러 급수 전개를 하면 식 (10)과 같다.

$$Y(\mathbf{X}) \cong Y(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}) + \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_{X_i}) \frac{\partial Y}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j}) \frac{\partial^2 Y}{\partial X_i \partial X_j} + \dots \quad (10)$$

1차항까지만 사용하여 통계적 모멘트를 이용하면, 시스템 응답함수의 평균과 분산은 식 (11)과 같이 구할 수 있다. 테일러 급수 전개 방법을 이용하면 적분을 수행할 필요가 없으며 단지 설계변수에 대한 계의 응답함수의 민감도만이 필요하다. 일반적으로 해석적인 민감도를 구하기가 힘들기 때문에 유한차분법(Finite Difference Method; FDM)을 많이 쓴다.

$$E\{Y(\mathbf{X})\} = Y(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N})$$

$$Var\{Y(\mathbf{X})\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)^2 Var(X_i) \quad (11)$$

### 3.2 차원감소법

차원감소법은 가법 분해법(additive decomposition)을 이용하여 다중 변수를 가지는 계의 응답함수를 여러 개의 단일 변수함수의 합으로 근사화하여 다중적분을 일차 적분들의 합으로 변환한다. 여기서 가법 분해법은 식 (12)와 같다.<sup>(2)</sup> 특히 식 (12)와 같이 단일 변수함수들의 합으로 나누어 적분하는 차원감소법을 uDR(univariate Dimension Reduction)방법이라 한다.

$$Y(\mathbf{X}) \cong \sum_{i=1}^N Y(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{i-1}}, X_i, \mu_{X_{i+1}}, \dots, \mu_{X_N}) - (N-1)Y(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}) \quad (12)$$

이 근사화된 함수를 이용하여 통계적 모멘트를 구하면 식 (13)과 같고, 이 통계적 모멘트를 이용하여 계의 응답함수의 평균과 분산을 구할 수 있다.

$$E\{Y^l(\mathbf{X})\} = m_l$$

$$\cong E \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N Y(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{i-1}}, X_i, \mu_{X_{i+1}}, \dots, \mu_{X_N}) - (N-1)Y(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}) \right]^l \right\} \quad (13)$$

## 4. 설계변수 표본을 이용한 성능척도 모집단의 추정

표본(sample)을 이용하여 모수(statistical parameter)를 추정하는 방법은 점추정(point estimation)과 구간추정(interval estimation)이 있는데, 본 연구에서는 구간추정을 이용한다.

모집단에 대한  $(1-\alpha) \times 100\%$  신뢰구간은 식 (14)와 같고,  $(1-\alpha) \times 100\%$ 는 신뢰수준(confidence level)이라 한다.<sup>(6)</sup>

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (14)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$$

여기서  $\bar{x}$ 는 표본평균,  $s$ 는 표본표준편차,  $\mu$ 는 모집단평균,  $\sigma$ 는 모집단표준편차,  $t$ 는  $t$ 통계량,  $\chi^2$ 는 카이제곱통계량 그리고  $n$ 은 표본의 크기이다. 성능척도의 모집단의 모수 추정을 위해서 위의 수식을 이용하려면 성능척도 표본의 통계량(statistic)이 요구된다. 본 연구에서는 성능척도 표본의 통계량을 구하기 위해서 산포를 가지는 설계변수로부터 성능척도 산포해석을 할 때 설계변수 모수를 사용하지 않고 설계변수 표본의 통계량을 이용한다. 이때 구해진 성능척도 표본의 통계량은 수학적으로 엄밀한 값은 아니며 일종의 유사 값(pseudo value)이다. 설계변수표본을 이용한 성능척도 모집단 추정에는 Fig. 5와 같은 과정을 이용한다.

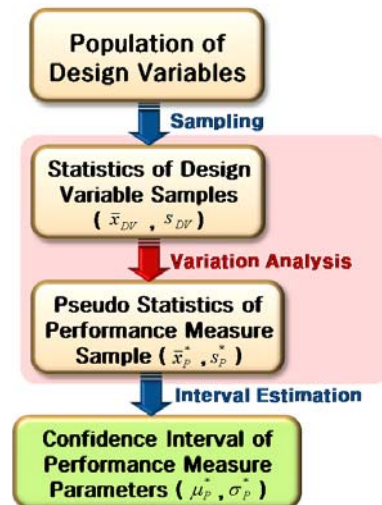


Fig. 5 The procedure of variation analysis based on design variable samples

## 5. 결 과

### 5.1 설계변수 모집단을 이용한 결과

설계변수는 감쇠비와 비선형비로 선정하였고, 계의 응답함수는 2.3 절에서 제시한 성능척도를 사용하였다. 설계변수 모집단은 정규분포를 따른다고 가정하였고, 감쇠비는 평균이 0.03 표준편차가 0.0003 그리고 비선형비는 평균이 0.0 표준편차가 0.0001 을 따르는 각각 10000 개의 난수를 생성하여 모집단으로 가정하였다. 몬테카를로 방법의 경우 모집단을 모두 사용하여 해석한 것이기 때문에 정확한 해라고 할 수 있고, 그 해를 기준으로 하여 1 차 테일러 전개 방법과 uDR 방법을 Table 1 에서 비교하였다.

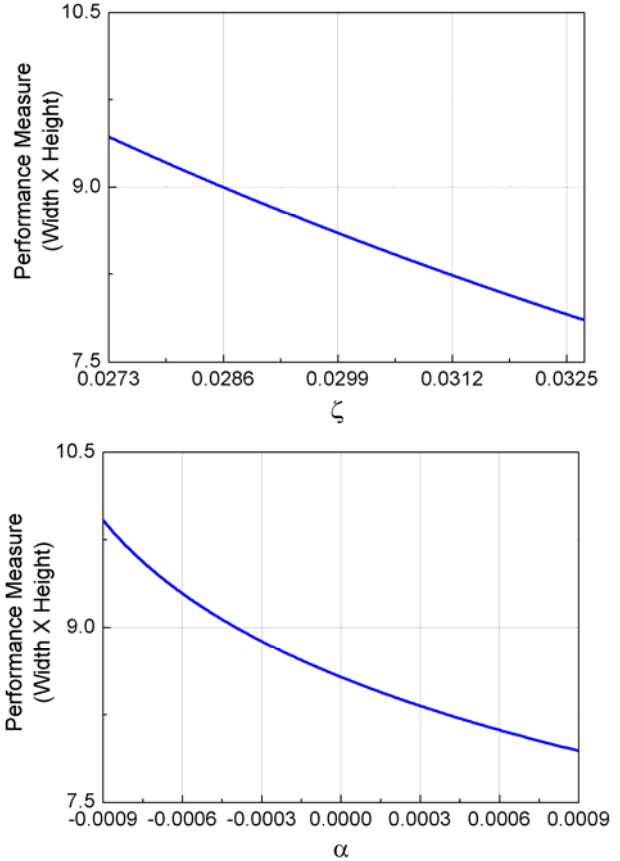
Table 1 에서 보면 성능 척도 평균은 uDR 방법, 1 차 테일러 급수 전개 방법 모두 잘 맞지만, 표준편차(standard deviation) 경우에 uDR 방법은 매우 해에 근접하지만 1 차 테일러 급수 전개 방법은 오차가 매우 큼을 알 수 있다. 이는 성능척도 함수를 근사화할 때 1 차 테일러 급수 전개 방법은 선형 함수로 근사화 하였기 때문이다. 하지만 이 성능척도 함수는 통계적 모멘트를 구하는 적분 구간에서 Fig. 6 에서 보는 바와 같이 비선형이다. 감쇠비에 대한 성능척도 함수는 비교적 선형이지만 비선형비에 대한 성능척도 함수는 비선형이다. 따라서 1 차 테일러 급수 전개 방법은 이러한 비선형성을 예측하지 못하여 큰 오차를 가지는 것이다. 만약 설계변수가 감쇠비만을 선정하였다면 1 차 테일러 급수 전개 방법 역시 차원감소법과 같이 정확한 해에 근접할 것이다.

이 비선형 진동계의 경우 감쇠비와 비선형비가 통계적 분포를 가질 때 성능 척도는 8.57887 의 평균과 0.12621 의 표준편차를 가지므로 이 비선형 진동계의 99.73%는 식(15)의 범위 내 성능을 낼 것이다.

$$8.20024 < \text{Performance Measure} < 8.95750 \quad (15)$$

**Table 1** Results of MCM, uDR method and Taylor expansion method

	MCM	uDR	1 <sup>st</sup> Taylor
Mean	8.57887	8.57718	8.57301
Error (%)	-	0.02	0.07
STDEV	0.12621	0.12622	0.17775
Error (%)	-	0.0008	40.8
Computation Time (sec)	1307.94	125.17	0.6714
Ratio	1948	186	1



**Fig. 6** Performance measure function about each design variable in integration interval

### 5.2 설계변수 표본을 이용한 결과

설계변수는 5.1 절과 마찬가지로 감쇠비와 비선형비로 선정하였고, 5.1 절과 똑같은 각각 10000 개의 모집단을 사용하였다. 설계변수 표본의 크기는 50, 표본으로부터 계의 성능척도 모집단 예측에는 95% 신뢰수준을 사용하였다. 그리고 산포해석기법은 1 차 테일러 급수 전개 방법은 정확한 해와의 오차가 크기 때문에 의미가 없어서 차원분해법을 사용하였다. 그 결과는 Table 2 에 정리하였다. Table 2 의 신뢰구간은 정확한 해인 평균 8.57887 과 표준편차 0.12621 은 잘 예측하고 있음을 알 수 있다.

**Table 2** Confidence interval of performance measure parameter

	95% Confidence interval
Mean	$8.530641 < \mu_{Perf} < 8.594120$
STDEV	$0.093292 < \sigma_{Perf} < 0.139171$

## 6. 결 론

본 연구에서는 비선형 진동계의 진동 특성을 알아 보았고, 비선형비와 감쇠비는 통계적 분포를 따르다고 가정하고 산포해석을 수행하였다. 비선형비와 감쇠비의 모집단을 이용하여 테일러 급수 전개 방법 그리고 차원감소법을 이용하여 산포해석 하였고, 결과를 비교하여 두 방법의 장, 단점을 비교하였다. 테일러 급수 전개 방법은 적분이 필요 없고 설계변수에 대한 성능척도의 민감도만 필요하기 때문에 해석에 있어서 매우 효율적이지만 성능척도 함수에 비선형성이 존재 한다면 사용할 수 없다. 그에 비해서 차원감소법은 테일러 급수 전개 방법보다 계산시간이 조금 오래 걸리지만 성능척도 함수에 비선형성이 존재하여도 비교적 정확한 결과를 줌을 확인하였다. 또한 보다 현실적인 해석을 위하여 비선형비와 감쇠비 표본의 통계량을 이용하여 비선형 진동계의 성능척도 모수를 예측하였다.

## 후 기

이 논문은 2009 년도 2 단계 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

## 참 고 문 헌

- (1) Choi, D. H., 2005, " Statistical Tolerance Analysis and Modal Analysis of Multibody Systems" , Hanyang University, Ph. D. Thesis
- (2) S. Rahman, H. Xu, 2004, " A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics" , Probablistic Engineering Mechanics, Vol. 19, Issue 4, October 2004, pp.393-408
- (3) Daniel J. Inman, 2001, Engineering Vibration, Prentice Hall, New Jersey
- (4) Peter Hagedorn, 1988, Non-Linear Oscillations, Oxford Science Publications, Oxford
- (5) H. Xu and S. Rahman, 2005, " Decomposition methods for structural reliability analysis" , Probablistic Engineering Mechanics, Vol. 20, Issue 3, pp. 239-250
- (6) Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, Sharon L. Myers, Keying Ye, 2002, Probability & Statistics for Engineers & Scientists, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp. 230-265