

회전축을 따라 이동하는 강체의 동해석

박용석*, 홍성철**

*인하공업전문대학 기계과

**한라대학교 기계자동차공학부

e-mail:schong@halla.ac.kr

Dynamic Analysis of a Rigid Body Travelling on the Rotating Shaft

Yong-Suk Park*, Sung-Chul Hong**

*Dept of Mechanical Engineering, Inha Technical College

**School of Mechanical and Automotive Engineering, Halla University

요 약

본 연구에서는 두 스프링으로 지지된 강체가 회전하는 Timoshenko 축을 따라 이동할 때, 그 계의 동적응답 특성을 해석하였다. 운동방정식은 Hamilton의 원리에 따라 유도되었다. 유도된 운동방정식을 이용하여 주요 설계 파라미터 변화에 따른 응답특성을 해석하였다. 해석시 설계파라미터를 무차원 변수화 하여 속도비, 질량비, 회전수비 등 그 변화에 따른 응답특성을 비교 분석하였다.

1. 서론

이동하중을 받는 구조물의 동적 거동은 이동물체의 속도에 따라 정하중을 받을 때 보다 큰 처짐을 나타내게 되어 구조물의 설계에 중요한 영향을 미치게 된다. 이러한 문제에서는 구조물과의 동적상호작용을 하는 이동질량의 관성효과가 중력보다도 구조물의 응답에 큰 영향을 미치고 있으므로 속도비와 질량비에 대한 수치해석 연구가 활발히 진행되어 왔다. [1~4]

Katz[5]는 회전하는 Euler, Rayleigh, Timoshenko 보에 일정한 속도로 이동하는 하중을 받는 문제의 동적응답 해석을 수행하였다. Lee[6]은 Assumed Mode Method를 이용하여 축방향의 압축력을 고려한 운동의 수치해석이 병행되었다. Gu[7]은 이동질량에 대한 해석, 고속으로 회전하는 볼 스크류와 이동하는 너트로 구성된 시스템에 대한 해석을 수행하였으며, Park[8]은 이동질량과 압축력을 받는 티모셴코 회전축의 운동에 대한 설계 파라미터를 추출할 수 있는 무차원 변수에 대한 연구를 수행하였다.

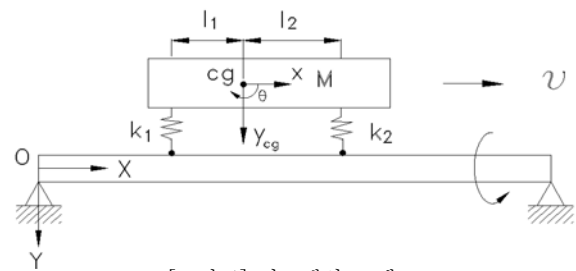
선반가공, 드릴링작업과 같은 기계 가공 작업시 진동문제는 정밀가공에 큰 영향을 미친다. 볼스크류우를 이용한 위치제어 분야에서도 성능유지 및 개선을 위한 연구의 필요성이 대두되고 있는 실정이다.

더블 너트 방식의 볼나사는 2개의 너트사이에 들어간 간좌로 예압을 주는 방식으로 회전축과 2개의 지점이 접촉하고 있어 회전축과 동적상호작용이 발생하게 된다. 본 연구에서는 직선 운동하는 기계장치의 운동을 2 자유도 강체운동으로 모델링하며, 2개의 접촉점을 통해 회전축과

의 동적상호작용 특성을 파악할 수 있는 모델의 운동방정식을 유도하고, 중요 설계변수들이 기계장치 운동에 어떠한 영향을 미치는지를 해석하여, 제품의 안정성을 확보할 수 있는 설계 자료를 제시하고자 한다.

2. 운동방정식

2.1 시스템의 운동방정식



[그림 1] 시스템의 모델

그림 1의 모델은 일정한 각속도 Ω 로 회전하며, 단면이 일정한 길이 L 의 축이 단순지지 되어 있다. 회전축과 접촉하여 이동하는 강체는 질량 M , 관성모멘트 I 를 갖으며, 회전축과 두점에서 스프링(k_1, k_2)으로 접촉하고 있다. 강체는 일정한 속도 v_m 으로 X 축 방향으로 이동한다, 강체는 축과 함께 회전하지 않으며, 운동 중에 축과 접촉상태에 있다고 가정한다. 축의 단면적은 A , I_p 는 단면2차모멘트, 단면 형상계수는 κ , 영의계수 E , 전단탄성계수 G 그리고 ρ 는 밀도를 나타낸다. L_1, L_2 는 질량중심으로부터 지지대까지의 거리를 나타낸다. 평면운동을 하는 시스템의 운동방정식은

절대좌표로 수직변위 y_{cg} 와 각변위 θ 로 나타낼 수 있다. 축은 Timoshenko의 빔으로 Y와 Z축 방향으로의 처짐은 $V(x,t)$ 와 $W(x,t)$, Y와 Z축에 대한 미소의 회전각은 $B(x,t)$ 와 $\Gamma(x,t)$ 로 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} V(x,t) &= V_b(x,t) + V_s(x,t) \\ W(x,t) &= W_b(x,t) + W_s(x,t) \\ B(x,t) &= -\frac{\partial W_b(x,t)}{\partial x}, \quad \Gamma(x,t) = \frac{\partial V_b(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

축의 포텐셜에너지 U_s 는 다음과 같이 표현된다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L EI [(\Gamma')^2 + (B')^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA [(V')^2 + (W')^2 + \Gamma^2 + B^2 - 2\Gamma V' + 2B W'] dx \quad (2)$$

여기서 (')는 x에 대한 편미분을 나타낸다. 아울러 이 동계의 포텐셜에너지 U_M 는 다음과 같다.

$$U_M = \frac{1}{2} k_1 (y_{cg} - l_1 \theta + V_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_{cg} + l_2 \theta + V_2)^2 \quad (3)$$

일정한 속도 Ω 로 회전하는 축의 운동에너지 T_R 과 접촉하는 이동계의 운동에너지 T_M 은 각각 다음과 같이 나타내어진다.

$$T_R = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A [\dot{V}^2 + \dot{W}^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I [\dot{B}^2 + \dot{\Gamma}^2] dx - \frac{1}{2} \Omega (2\rho I) \int_0^L [\dot{\Gamma} B - \dot{B} \Gamma] dx + \frac{1}{2} \Omega^2 \int_0^L 2\rho I dx \quad (4)$$

$$T_M = \frac{1}{2} M [v_m^2 + (\frac{\partial V}{\partial t} + v_m \frac{\partial V}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial t} + v_m \frac{\partial W}{\partial x})^2]_{|x=v_m t} \quad (5)$$

여기서 (·)는 시간에 대한 미분을 나타낸다.

중력에 의해 시스템에 가해지는 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_G = \frac{l_2}{l_1+l_2} Mg \delta V|_{x=x_1} + \frac{l_1}{l_1+l_2} Mg \delta V|_{x=x_2} \quad (6)$$

Hamilton의 원리를 이용하여 다음과 같은 시스템의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\rho A \ddot{V} - \kappa A G (V'' - \Gamma') = F_i \quad (7)$$

$$\rho A \ddot{W} - \kappa A G (W'' + B') = 0 \quad (8)$$

$$\rho I \ddot{B} + 2\Omega \rho I \dot{\Gamma} - EI B'' + \kappa A G (B + W') = 0 \quad (9)$$

$$\rho I \ddot{\Gamma} - 2\Omega \rho I \dot{B} - EI \Gamma'' + \kappa A G (\Gamma - V') = 0 \quad (10)$$

$$M \ddot{y}_{cg} + k_1 (y_{cg} - l_1 \theta + V_1) + k_2 (y_{cg} + l_2 \theta + V_2) = 0 \quad (11)$$

$$I_3 \ddot{\theta} + k_1 l_1 (y_{cg} - l_1 \theta + V_1) - k_2 l_2 (y_{cg} + l_2 \theta + V_2) = 0 \quad (12)$$

여기서 $F_i = F_1 + F_2$ 이며 각 항은 아래와 같다.

$$F_1 = k_1 (y_{cg} - l_1 \theta + V_1) + (\frac{l_2}{l_1+l_2} Mg)_{x=x_1} \quad (13)$$

$$F_2 = k_2 (y_{cg} + l_2 \theta + V_2) + (\frac{l_1}{l_1+l_2} Mg)_{x=x_2}$$

운동방정식의 변위를 다음과 같이 가정한다.

$$V(x,t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) \phi_i(x), \quad W(x,t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) \phi_i(x) \quad (14)$$

$$W_b'(x,t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) \psi_i(x), \quad V_b'(x,t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \psi_i(x)$$

Galerkin 방법에 의해 식(7)~(13)의 시스템 운동방정식은

다음과 같은 형태의 행렬 방정식으로 유도된다.

$$[\overline{M}] \ddot{Q} + [\overline{C}] \dot{Q} + ([\overline{K}]_f + [\overline{K}]_m) Q = [\overline{F}] \quad (15)$$

유도된 운동방정식은 축의 회전을 포함한 티모센코 축에 대한 이동계와의 동적상호작용을 해석할 수 있는 포괄적인 방정식으로 해의 수렴성을 고려하여 10차 모우드까지 포함하였다.

3. 수치해석

수치해석을 수행하여 설계파라미터 별 응답특성을 파악하기 위해 아래와 같은 무차원 매개변수를 정의한다. 또한 5차 Runge-Kutta 법을 이용하여 시스템의 해를 구하였으며, 프로그램은 Matlab을 이용하였다.

이동질량의 속도비 : $\alpha = v_m/v_{cr}$

축의 회전비 : $\overline{\Omega} = \Omega/\omega_1$

Rayleigh 보의 계수 : $\beta = \pi r_0/L$

질량비 : $\overline{m} = M/\rho A L$

Y 방향 축의 처짐비 : V/V_s

여기서, v_{cr} 은 회전하지 않는 단순지지 Euler-Bernoulli 보의 임계속도 $v_{cr} = (\pi/L) \sqrt{EI/\rho A}$ 이며, β 는 축의 길이에 대한 지름과 관련된 단면의 정보를 나타내는 Rayleigh 보 계수이다. r_0 는 회전반경(radius of gyration), ω_1 은 단순지지보의 고유진동수, V_s 는 단순지지보의 중앙에 하중이 작용할 때의 정적처짐을 나타낸다. 지지대의 스프링상수는 $k = EA/L$ 을 기준으로 무차원화 하였다.

3.1 운동해석 I

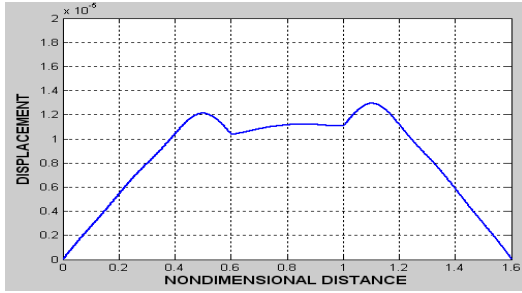
첫째로 회전하지 않는 축에 두개의 지지부를 갖는 이동계의 운동해석을 다루었다. 사용된 물성치는 Lin[9]이 사용한 것으로 표 1과 같다. 표 1은 단순지지보에 대한 해석에 사용된 물성치로 질량비가 약 0.25인 경우이다.

[표 1] 프로그램에 사용된 물성치

Parameter of the Beam	Parameter of the Moving System
$L = 47 \text{ in}$	$l_1 = 13.7005 \text{ in}$
$\rho = 2.7701 E - 04 \text{ lbs}^2/\text{in}^4$	$l_2 = 14.6229 \text{ in}$
$E = 15.2 \times 10^6 \text{ psi}$	$m = 0.02514 \text{ lbs}^2/\text{in}$
$A = 7.90625 \text{ in}^2$	$k_1 = 12356.66 \text{ lb/in}$
$I_p = 22.7 \text{ in}^4$	$k_2 = 10297.74 \text{ lb/in}$
	$I = 5.0297 \text{ lb in}^2$

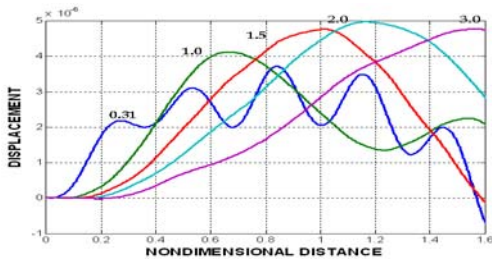
그림 2는 이동계의 하중에 대한 정적인 처짐을 나타낸 결과이다. 가로축은 축의 길이에 대한 이동계의 위치비로 나타낸 것이다. 무차원 거리(Nondimensional Distance)는 이동계의 지지대 2가 축의 선단을 진입했을 때가 0이며, 지지대 1이 탄성보의 끝단을 지날 때 최대값을 나타낸다.

무차원 거리 0.6일때 지지대 1이 축에 하중을 작용하고 있으므로 축의 처짐이 증가함을 알 수 있으며, 무차원 거리 1일 때 지지대 2의 하중이 축에 작용하지 않으며, 지지대 1의 하중만이 작용하므로, 처짐이 불연속적으로 변하고 있음을 알 수 있다.

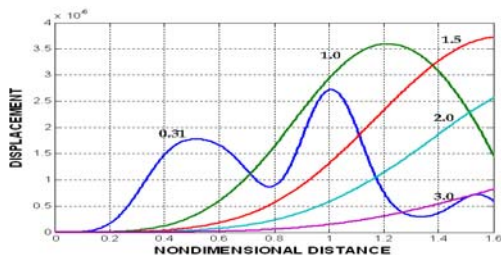


[그림 2] 정하중을 받는 축의 중앙지점에서의 응답

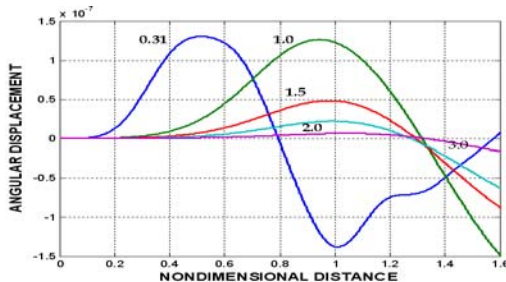
그림 3은 보의 중앙에서의 응답을 이동계의 이동속도에 따라 비교한 결과로써 보의 고유진동주기에 비해 낮은 속도로 이동하는 이동계의 응답은 정적처짐곡선을 따라감을 알 수 있으며, 이동속도비가 커짐에 따라 최대 처짐량이 점점 커지다가 감소하는 경향을 볼 수 있다. 한편 강체의 수직운동의 결과는 그림 4와 같다. 최대변위는 속도비가 1.5 부근일 때 발생되며 지지대 1이 탄성보 끝단을 이탈할 시기에 발생된다. 한편 이동계의 속도가 더 빠를 경우 최대 처짐량은 작아진다. 이동하는 강체의 회전운동은 그림 5와 같다. 최대 각변위는 속도비가 0.31, 이동계의 이동거리비가 0.5부근 즉 지지대 2가 탄성보의 중앙점에 위치했을 때 나타난다. 이러한 각변위는 이동거리비가 0.8 부근에서 영이 되었다가 시계방향으로 회전하여 지지대 2가 탄성보의 끝단을 지날 때 다시 한번 큰 각변위를 나타낸다.



[그림 3] 하중을 받는 축의 중앙지점에서의 응답



[그림 4] 이동계의 수직변위 응답



[그림 5] 이동계의 각변위 응답

3.2 운동해석 II

두 번째는 축이 회전운동을 할 때, 이동계의 운동해석을 다루었다. 수치해석에 사용된 무차원 변수는 Park[8]이 제시한 아래와 같은 영역을 사용하였고 회전축에 대한 물성치는 표 2와 같다.

이동물체의 속도비 : $0 \leq \alpha \leq 1.5$

축의 회전비 : $0 \leq \bar{\Omega} \leq 2.5$

Rayleigh 보의 계수 : $0 \leq \beta \leq 0.3$

질량비 : $0.1 \leq m \leq 0.4$

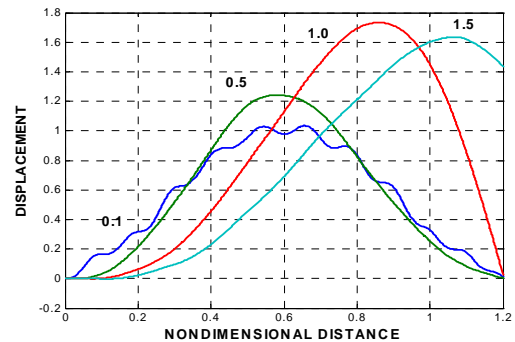
스프링상수비 : $\bar{k} = k_1/k = k_2/k$,

[표 2] 프로그램 해석에 사용된 물성치

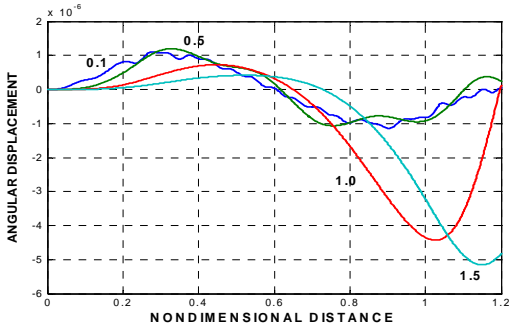
Parameter	Value
ρ	7700 kg/m ³
E	207 GPa
G	77.6 GPa
L	1 m
κ	0.9

그림 6은 속도비 α 가 0.1, 0.5, 1.0, 1.5일 때, 이동시스템 하중에 대한 결과를 보여 주고 있다. 속도비가 커질수록 Y 방향 처짐비 V/V_s 의 최대값은 점점 커지다가 작아짐을 알 수 있다. 아울러 최대값을 나타내는 지점은 속도가 빠를수록 이동계가 중앙위치를 지날때에서 축의 우측 끝부위로 이동하며 발생함을 볼 수 있다.

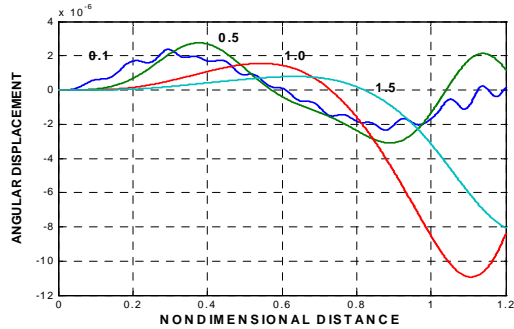
이동계의 각변위에 대한 결과가 그림 7이다. 이동계의 속도가 축의 임계속도보다 큰 경우인 $\alpha=1.0, 1.5$ 에는 처짐이 크게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다. 이동계의 질량비가 커짐에 따라 축 처짐의 변화는 미미하나, 이동계의 변위와 각 변위가 상대적으로 크게 나타남을 그림 8로부터 알 수 있었다. 그림 9는 이동하중을 받는 회전축에 대한 Rayleigh 보의 계수 β 의 변화에 따른 해석결과이다. β 의 값이 작을 경우는 단면적이 작은 축으로 결과에서 보는바와 같이 이동계의 하중의 영향이 크게 나타내고 있음을 알 수 있다.



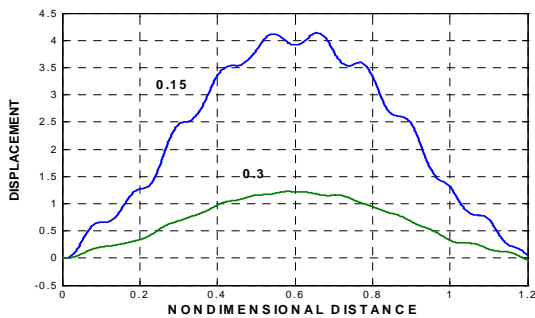
[그림 6] 이동속도 변화에 따른 축 중앙지점에서의 응답 ($\bar{\Omega}=2.5, \beta=0.15, m=0.2, \bar{k}=0.1$)



[그림 7] 이동속도변화에 따른 강체의 각변위 ($\bar{\Omega}=2.5, \beta=0.15, \bar{m}=0.2, \bar{k}=0.1$)



[그림 8] 이동속도 변화에 따른 강체의 각변위 ($\bar{\Omega}=2.5, \beta=0.15, \bar{m}=0.4, \bar{k}=0.1$)



[그림 9] β 값 변화에 따른 축 중앙지점에서의 응답 ($\bar{\Omega}=2.5, \bar{m}=0.2, \bar{k}=0.1, \alpha=0.1$)

4. 결론

일정한 속도로 이동하는 이동계가 2개의 접촉점을 통해 회전축과 동적상호작용하는 시스템의 운동특성을 파악할 수 있는 연구를 수행하여 얻은 결과는 다음과 같다.

- (1) 이동계의 강체운동이 Timoshenko 회전축과 접촉 운동하는 모델을 제시하였으며, 동적상호작용하는 포괄적인 운동 방정식이 유도되었다.
- (2) 특정한 영역의 질량비와 속도비에서는 이동계의 강성 변화는 상호접촉하고 있는 회전축의 운동에 영향을 미치지 않음을 알 수 있었다. 따라서 질량비가 무척 작고 속도비가 큰 경우의 특정파라미터 영역에서의 운동 해석시 이동계의 운동은 회전축에 큰 영향을 미치지 않으며, 회전축의 운동이 일종의 외력 형태로 이동계에 가해 진다고 할 수 있다.

(3) 이동하는 2점 가진형태를 받는 회전축의 경우 속도비가 커짐에 따라 Y방향 처짐비의 최대값은 점점 커지다가 작아짐을 알 수 있으며, 최대처짐은 모두 $\alpha=0.3\sim 0.4$ 부근에서 나타나고 있음을 알 수 있었다. 아울러 최대처짐이 발생하는 위치는 회전축의 우측부위로 이동하며 나타남을 확인 할 수 있다.

(4) Rayleigh 보의 계수 β 의 값이 작은 경우 단면적이 작은 축으로 처짐비가 크게 나타남을 알 수 있다.

(5) 본 연구를 통하여 회전축과 접촉하는 강체의 운동을 해석할 수 있는 기반을 마련하였으며, 회전축의 속도와 연계된 이동계의 속도에 따른 동적상호 작용과 다양한 경계 조건에 대한 특성 해석이 가능하게 되었다.

참고문헌

- [1] Ting, E. C., Genin, J. and Ginsberg, J. H., "A General Algorithm for Moving Mass Problems," J. of Sound and Vibration, Vol.33, No.1, pp. 49-58, 1974.
- [2] Akin, J. E. and Mofied, M., "Numerical Solution for Response of Beam with Moving Mass," Journal of Structure Engineering, Vol. 115, No. 1, pp. 120-131, 1989.
- [3] Cifuentes, A. O., "Dynamic Response of a Beam Excited by a Moving Mass," Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 5, pp. 49-58, 1989.
- [4] Stanicic, M. M., "On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving Masses," Ingenieur-Archive, Vol. 56, pp. 175-185, 1985.
- [5] Katz R., Lee C. W. Ulsoy A. G., Scott R.A., "The dynamic response of a rotating shaft subject to a moving load," Journal of Sound and Vibration 122 (1) 131-148, 1988.
- [6] Lee H. P., "Dynamic response of a rotating Timoshenko shaft subject to axial forces and moving loads," Journal of Sound and Vibration 181 (1) 169-177, 1995.
- [7] Gu U. C., Cheng C. C., "Vibratioin analysis of a high-speed spindle under the action of a moving mass," Journal of Sound and Vibration, article in press.
- [8] Park, Y. S. and Hong, S. C.(2007), "Nondimensional Parameter Study of a Timoshenko Rotating Shaft Subjected to Moving Mass and Compressive Axial Forces," Transaction of KSNVE, Vol.17, No.12, pp.1201-1207.
- [9] Lin, Y. H. and Trethewey, M. W., 1990, "Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads," Journal of Sound and Vibration, 136(2), pp. 323-342.