섭동법에 의한 철도차량 윤축의 임계속도 추정

Limit Speed of Railway Vehicle Wheelset by Perturbation Method

*유원희[1], #신유정[2], 박준혁[3], 허현무[3], 김남포[3]
*W. H. You[1], # Y. J. Shin(yjshin@krri.re.kr)[2] , J. H. Park[3], H. M. Hur[3], N. P. Kim[3]
[1] 한국철도기술연구원, [2]한국철도기술연구원(과학기술연합대학교대학원), [3]한국철도기술연구원

Key words : Perturbation, Railway vehicle, Wheelset, Limit speed

1. 서론

철도차량의 동력학적 특징 중의 하나는 비선형 특성이 강하다는 것이다. 비선형 특성이 강한 이유는 우선, 질량의 변화가 매우 크고, 이로 인하여 현가장치의 특성이 선형의 한계를 벗어나게 되며, 아울러 차륜/레일 접촉에서 비선형성을 가지게 된다는 것이다. 그러나 이러한 비선형성보다 더 주목해야 하는 것은 철도차량 윤축의 임계속도에 영향을 주는, 다시 말해서 윤축의 횡방향 운동에 제한을 가져오는 차륜 플랜지의 영향이다. 차륜 플랜지는 차륜이 차륜이 레일을 벗어나 탈선을 하지 않도록 윤축의 횡방향 운동을 제한하는 역할을 한다. 그러나 차륜의 플랜지로 인하여 비선형적인 차륜/레일의 접촉기하학의 문제가 발생된다.

철도차량 윤축의 임계속도에 대한 연구는 오래 전부터 연구되어 왔다.[1],[2],[3] 이 연구들은 주로 비선형문제에 대한 해결방법 중의 하나로 Shooting Method나 Bogoliubov Averaging Method와 같이 적분방정식에 근거한 다소 어려운 수학적 접근 방법을 사용하였다. 최근에 이르러 최근에 이르러 Wagner[4]는 Duffing Oscillator의 예를 들면서, 동력학적 시스템의 비선형 특성이 대부분 선형시스템의 고유진동수 주위에서 발생한다는 점에 착안하여 Harmonic Balance 방법을 사용함으로써 비교적 간단히 윤축의 임계속도를 찾아내는 방법을 발표하였다. 이러한 연구들의 기초는 모두 이미 오래 전에 Nayfeh[5]에 의해 이룩된 것이었다.

본 연구에서는 Wagner의 연구를 바탕으로 Dukkipati[6]가 제안한 윤축의 동력학적 식에 적용하여 검토해 보고자 하였다.

2. Duffing Oscillator

조화가진력 하에 있는 Duffing oscillator 의 운동방정식은 다음과 같다.

$$x'' + 2Cx' + x + \epsilon x^3 = \sigma \sin(\eta\tau - \psi) \qquad (1)$$

여기서 '는 무차원 시간 τ에 대한 미분을 나타내며, C는 무차원 댐핑, σ는 무차원 조화가진력의 크기, η는 선형시스템의 고유진동수와 가진주파수의 비를 나타낸다. 3 차 비선형 항은 $|\epsilon x^3| \ll |x|$로서 매우 작은 값이다.

식(1)의 근사해를 섭동법에 의해 구하는 방법은 Nayfeh 에 위해 잘 알려져 있다.[5] 가장 중요한 것은 공진의 경우이다. 즉, 가진에 비해 응답이 매우 큰 경우를 고려한다. 댐핑이 작은 경우 식(1)은 다음과 같이 고려될 수 있다.

$$x'' + \epsilon d x' + x + \epsilon x^3 = \epsilon(a_1 \cos\eta\tau + a_2 \sin\eta\tau)$$

(2)

Lindstedt-Poincaré 방법에 의해 다음과 같은 Series Expansion 을 사용한다.

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \cdots, \quad \eta = \eta_0 + \epsilon\eta_1 + \cdots \qquad (3)$$

여기서 $\eta_0 = 1$ 이다. 식(3)을 식(2)에 대입하여 0 차 항의 해 x_0를 구하기 위해 1 차 항의 Secular 항을 0 으로 하면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$x_0 = A \sin\eta\tau \qquad (4)$$

여기서 크기 A는 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$\frac{9}{16}A^6 - 3\eta_1 A^4 + (4\eta_1^2 + d^2\eta^2) - (a_1^2 + a_2^2) = 0 \qquad (5)$$

식(5)의 해는 잘 알려진 바와 같이 Fig. 1 에 나타나 있다. (단, C=0.02, ε=0.001, σ=1.0)

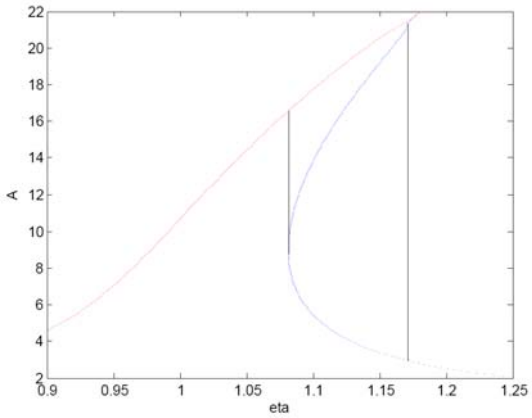

Fig. 1 Duffing Oscillator 의 정상해(크기 A)

이 그림을 보면 두 수직선 사이의 영역은 불안정 영역에 속함을 알 수 있다. 이제 이 개념을 바탕으로 철도차량 윤축의 임계속도를 구한다.

3. 철도차량 윤축의 임계속도

철도차량의 윤축은 주행 중 탈선방지를 플랜지를 갖고 있으며, 이 플랜지에 의해 횡방향의 운동은 제약을 받게 된다.

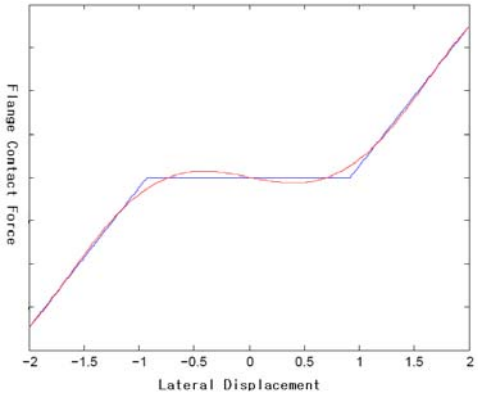

Fig. 2 Flange contact force and wheelset lateral displacement

따라서 횡방향의 힘은 Fig. 2 에서 보는 바와 같이 비선형성을 갖게 되는데, 여기서는 그 비선형성을 5 차 방정식으로 표현하여 섭동법을 적용하였다.

철도차량 윤축의 운동방정식은 일반적으로 다음과 같다.

$$my'' + \frac{2f_{22}}{V}(1 + r_0\frac{\delta_0}{a})y' + \frac{2f_{23}}{V}\psi' + 2(\frac{f_n\delta_0}{a} + k_y)y - 2f_{22}\psi + a_1y^3 + a_2y^5 = 0 \quad (6)$$

$$I_3\psi'' + [-\frac{2f_{23}}{V}(1 + r_0\frac{\delta_0}{a}) + \frac{I_2\delta_0 V}{a r_0}]y' + \frac{2a^2 f_{11}}{V}\psi' \frac{2f_{33}}{V}\psi' + \frac{2f_{11}a\delta_0}{r_0}y + 2(f_{23} + k_x L^2)\psi = 0 \quad (7)$$

여기서 m=1600kg, I_2=100kgm^3, I_3=900kgm^3, r0=0.46m, δ_0=0.05, 2a=1.435m, L=1.0m, k_x=k_y=4MN/m, f_n=56kN, f_{11}=14MN, f_{22}=11MN, f_{23}=f_{33}=0, a_1=-1.6E11N/m^3, a_2=1.6E15N/m^5 이다. 여기서 m은 윤축의 질량, I_2 및 I_3는 윤축의 축방향 및 수직방향의 관성모멘트, f_n은 축중, f_{ij}는 Kalker의 선형크립계수 이다. V는 차량의 속도이며, 나머지 파라미터는 Fig. 3 에 보는 바와 같다.

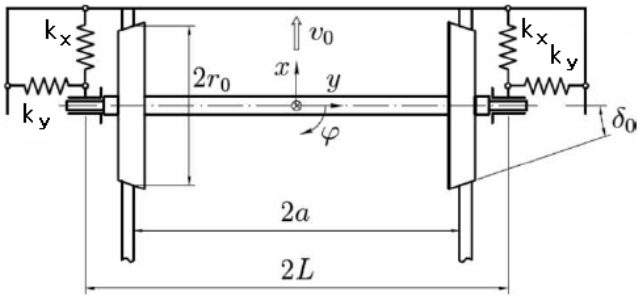

Fig. 3 Model of railway wheelset

Harmonic Balance 방법을 적용하면 다음과 같은 근사해를 얻을 수 있다.

$$y = A\sin(\omega t + \alpha)$$
$$\psi = B\sin(\omega t + \alpha) + C\cos(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

여기서 A, B, C 및 각속도 ω는 미지의 수이다. 위상 α 는 임의의 수로서 A, B, C 및 ω가 계산되면 식(6)은 임의의 α 에 대해 근사해가 된다. 식 (6)과 (7)을 다시 쓰면 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$F_1y'' + F_2y' + F_3\psi' + F_4y + F_5\psi + a_1y^3 + a_2y^5 = 0$$
$$G_1y'' + G_2y' + G_3\psi' + G_4y + G_5\psi = 0 \quad (7)$$

식(7)에 대해 Harmonic Balance 을 적용하여 고차항을 무시하고 정리하면 다음과 같이 자소 복잡한 식을 얻을 수 있다.

$$G_1F_2\omega^4 + (-F_3G_2G_3 + F_2G_3^2 + G_1G_2F_5 + G_1F_3G_4 - 2G_1F_2G_5)\omega^2 + (G_3F_5G_4 - G_2F_5G_5 - F_3G_4G_5 + F_2G_5^2) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{5}{8}a_2A^4 + \frac{3}{4}a_1A^2 + (-M_{11}\omega^2 - P_{12}\omega\beta_3 + Q_{11} + Q_{12}\beta_4) = 0 \quad (9)$$

여기서,

$$\beta_1 = \frac{G_3\omega}{G_5 - G_1\omega^2}, \qquad \beta_2 = -\frac{G_4}{G_5 - G_1\omega^2}$$

$$\beta_3 = -\frac{G_2\omega + G_3\omega\beta_2}{G_3\omega\beta_1 + G_5 - G_1\omega^2}, \quad \beta_4 = \beta_1\beta_3 + \beta_2 \quad (10)$$

이다. 이 식들을 가지고 윤축의 임계속도를 구하기 위해는 우선 임의의 속도에 대해 식(8)을 만족하는 각속도 ω를 구한다. 구해진 ω에 대해 식(10)을 만족하는 크기 A 를 구한다. 이 방법에 의해 구한 임계속도는 Fig. 4 와 같다. 속도 S1(138.3m/sec)은 비선형 임계속도이며, 속도 S2 (146m/sec)는 섬형임계속도이다. 즉, S1 과 S2 사이의 속도에서는 불안정성이 존재하게 된다.

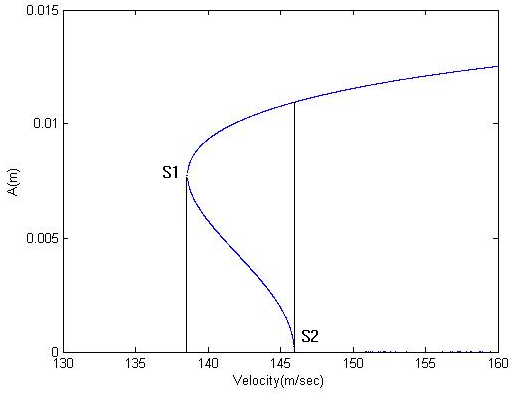

Fig. 4 Hopf bifurcation of railway wheelset

4. 결론

본 연구를 통해 비교적 간단한 방법으로 철도차량 윤축의 임계속도를 구할 수 있음을 알게 되었다. 본 연구에서 사용된 방법을 통해 구해진 임계속도는 추후 실험치와 비교되어 그 신뢰성이 입증되어야 할 것이다.

참고문헌

1. H. True, “Dynamics of a Rolling Wheelset”, Applied Mechanics Division ASME, Vol.46, pp.438-444, 1993.
2. M. Ahmadian, “Hopf Bifurcation and Hunting Behavior in a Rail Wheelset with Flange Contact”, Nonlinear Dynamics, Vol. 15, pp.13-30, 1998.
3. 정우진, 철도차량의 동적 안정성 해석, 고려대학교 기계공학과 박사학위 논문, 2000.
4. Utz von Wagner, “Nonlinear Dynamic Behavior of a Railway Wheelset”, Vehicle System Dynamics, Vol/47, Issue 5, pp.627-640, 2009.
5. Nayfeh, Introduction to Perturbation Techniques, 1993.