

가우스 적분법을 이용한 압밀침하량 산정

Evaluation of Consolidation Settlement by Gaussian Quadrature

윤찬영¹⁾, Chan-Young Yune, 정영훈²⁾, Young-Hoon Jung

¹⁾ 국립 강릉대학교 공과대학 토목공학과 전임강사, Full-time lecturer, Dept. of Civil Engineering, Kangnung National Univ.

²⁾ 경희대학교 공과대학 건설환경공학부 조교수, Assistant Professor, Department of Civil and Environmental Engineering, Kyunghee University

SYNOPSIS : Consolidation settlement, a crucial parameter in geotechnical design of soft ground, has not been computed in a unique way due to different computation methods in practice. To improve computational error in calculating consolidation settlement, a number of researches has been attempted. Conventional 1-dimensional consolidation theory assumes the center of the clay layer as the representative point to obtain effective stress in calculation, which could resort to erroneous results. To calculate exact solutions considering initial distribution of effective stress, diving a stratum into multi-layers could resort to wasting time and effort. In the study, a novel methodology for calculating consolidation settlement via Gaussian quadrature is developed. The method generally is capable of computing settlements in any case of the stress conditions encountered in fields.

Keywords : consolidation settlement, Gaussian quadrature, soft ground, consolidation theory

1. 서론

압밀침하량 산정은 연약지반의 개량에 있어서 매우 중요한 설계 항목이지만 침하량 산정방법에 따라 그 예측값이 다르게 나타나며 실제 침하량과의 오차도 커서 이를 개선하기 위한 연구가 다양한 측면에서 이루어지고 있다. 특히 1차원 압밀침하량 산정 이론은 압밀침하량 산정에 있어서 근간이 되는 이론이며 수치해석적 연구, 실험적 연구 및 현장설계에 있어서도 비교·평가의 기준이 되는 기초적 이론임에도 불구하고 이를 적용하는 기법에 따라서 산정되는 침하량의 차이가 크며 실제 현장계측과의 오차도 큰 것으로 알려져 있다.

최근의 연구에 따르면 기존의 1차원 압밀침하 산정이론을 적용함에 있어서 관행적으로 점토층 중앙부에서의 초기 유효응력을 대표 응력점으로 가정하고 침하량을 산정하는 경우에는 침하량을 항상 과소 평가 하며 그 오차도 1~2.2배 정도로 매우 큰 것으로 나타났다(윤찬영 등, 2008). 따라서 이러한 오차를 줄이기 위하여 기존에는 대상지반을 몇 개의 층으로 나누어 각 층에서 침하량을 계산하고 이를 합산하여 전체 침하량을 산정하지만, 지반조건 및 하중조건에 따라서 대상지반을 몇 개의 층으로 나누어야 하는지에 대한 기준은 현재까지 수립된 바가 없다.

본 연구에서는 기존에 대상 지반의 층을 나누어 계산하는 방법에 비하여 적은 노력으로도 오차가 적고 정확한 침하량을 산정할 수 있는 방법으로 가우스 적분법(Gaussian quadrature)을 도입하였다. 또한 이를 간단한 예제에 적용하여 그 정확성을 분석하고 적용성을 확인하였다.

2. 기존의 1차원 압밀침하량 산정 공식

1차원 압밀 침하량은 Terzaghi(1923)에 의하여 간극비 변화 및 그에 따른 연직변형률을 근간으로 다음 식 (1)과 같이 제안된 바 있으나 이 식은 점성토의 하중 증가에 따른 비선형적 압축특성을 반영하지 못하므로 Holtz와 Kovacs(1981), Das(1984), Terzaghi 등(1996)은 정규압밀 조건에서 식 (2)로, 과압밀 조건에서는 식 (3), (4)로 압밀침하량을 계산하도록 제안하였다.

$$S = H_0 \frac{a_v}{1 + e_0} \Delta \sigma'_v = H_0 m_v \Delta \sigma'_v \quad (1)$$

$$S = H_0 \frac{C_c}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_{v0} + \Delta \sigma'_v}{\sigma'_{v0}} \quad (2)$$

$$S = H_0 \frac{C_r}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_{v0} + \Delta \sigma'_v}{\sigma'_{v0}} \quad (\text{이 때, } \sigma'_{v0} + \Delta \sigma'_v \leq \sigma'_p) \quad (3)$$

$$S = H_0 \frac{C_r}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_p}{\sigma'_{v0}} + H_0 \frac{C_c}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_{v0} + \Delta \sigma'_v}{\sigma'_p} \quad (\text{이 때, } \sigma'_{v0} + \Delta \sigma'_v > \sigma'_p) \quad (4)$$

여기서, S 는 침하량, H_0 는 초기 점성토층의 두께, a_v 는 압축계수, m_v 는 체적압축지수, e_0 는 초기 간극비, $\Delta \sigma'_v$ 는 연직 유효응력 증분, σ'_{v0} 는 초기 연직유효응력, σ'_p 는 선행압밀응력이다. 이 때, 식 (2), (3), (4)에서 초기 연직유효응력 σ'_{v0} 은 깊이에 따라서 선형적으로 증가하는 변수이므로 일반적으로는 이를 점성토층 중앙부에서 초기 연직유효응력으로 가정하여 침하량을 산정한다(Lambe와 Whitman, 1979; Das, 2002; NAVFAC 설계법, 1982). 하지만 식 (2), (3), (4)에서 초기 연직유효응력이 대수항 안에 있으므로 점성토층의 중앙부의 값을 대표값으로 가정하고 계산하는 경우에는 실제 정해와 비교하여 큰 오차가 발생할 수 있다. 따라서 좀 더 정확하게 침하량을 계산하기 위하여 점성토층을 몇 개의 층으로 분할하고 각 층의 중앙부에서 초기유효응력을 계산한 후 압밀침하량을 계산하고, 각각의 층에서 계산된 침하량을 합하여 총 침하량을 산정할 수 있다. 하지만 이 방법에서는 계산된 침하량의 정해에 대한 오차율의 산정이나 층 분할 개수에 대한 구체적 기준이 전무하며, 관련 연구도 매우 부족한 실정이다.

3. 가우스 적분법을 이용한 1차원 압밀침하량 산정 공식

구간을 분할하여 적분을 수행하는 다양한 방법 중에서 가우스 적분법(Gaussian quadrature)은 적절한 가중치 및 적분점 선택방법을 통하여 단순한 구간분할법에 비하여 높은 정확도의 계산결과를 얻을 수 있는 수치적 해법으로 이미 유한요소해석(finite element analysis)과 같은 수치해석에서 널리 쓰이고 있는 방법이다. 가우스 적분법은 가우스-르장드르 공식(Gauss-Legendre formula), 가우스-체비셰프 공식(Gauss-Chebyshev formula), 가우스-허미트 공식(Gauss-Hermite formula), 가우스-라게라 공식(Gauss-Laguerre formula) 등이 있으며, 일반적으로 르장드르 다항식에 기반한 가우스-르장드르 공식이 널리 사용되고 있다. 가우스 적분의 기본 공식은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n w(x_k) f(x_k) + R_n(x) \quad (5)$$

여기서, x_k 는 적분점의 좌표이고, $w(x)$ 는 가중치이다. 이 식에서 적분구간 $[a, b]$ 를 일반 공식화하기 위하여 $[-1, +1]$ 로 선형변환하고, 이에 맞추어 함수 $f(x)$ 를 선형맵핑(linear mapping)하면 위의 식 (5)는 다음 식 (6)과 같이 일반화된 가우스-르장드르 공식으로 변환할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}d\xi\right) \quad (6)$$

$$= \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n w(\xi_k) f\left(\frac{b-a}{2}\xi_k + \frac{b+a}{2}\right) + R_n(\xi)$$

여기서, ξ_k 는 k 번째 르장드르 다항식(식 (7))에서 $P_n(\xi) = 0$ 을 만족하는 해이며 일반화된 적분구간에서의 적분점이다.

$$P_n = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \quad (7)$$

여기서 M 은 정수가 되는 $n/2$ 또는 $(n-1)/2$ 이다. 여기서 구간을 나누는데 사용하는 n 개 점의 좌표를 선택할 때 르장드르 다항식을 사용하며 이 방법을 n 점 가우시안 방법이라고 부른다. n 값에 따른 적분점과 가중치의 예를 5개점까지 정리해보면 다음 표 1과 같다.

표 1. n 점 가우시안 방법에서 적분점과 가중치

n	적분점(ξ)	가중치	차수
2	-0.57735	1.00000	4
	+0.57735	1.00000	
3	-0.77460	0.55556	6
	0	0.88889	
	+0.77460	0.55556	
4	-0.86114	0.34786	8
	-0.33998	0.65215	
	+0.33998	0.65215	
	+0.86114	0.34786	
5	-0.90618	0.23693	10
	-0.53847	0.47863	
	0	0.56889	
	+0.53847	0.47863	
	+0.90618	0.23693	

깊이에 따른 초기 유효응력 변화를 고려하여 식 (2), (3), (4)를 적분식으로 변환하고 가우스 적분법을 적용하여 계산하면 다음과 같다. 먼저 완전히 포화되어있는 균질한 점성토 지반에 대하여 $\gamma_t - \gamma_w = \gamma_{sub}$ 라고 하면, 초기 유효응력은 임의의 깊이 z 에 대하여 $\gamma_{sub}z$ 로 계산된다. 따라서 점성토층의 깊이를 H_0 라고 하면 가우스 적분법을 적용하여 계산되는 총 압밀침하량은 다음 식 (8), (9), (10)과 같다. 단, 적분식 변환을 위한 지반 조건은 지표면으로부터 깊이 H_0 까지 균질한 점성토 지반으로 가정하였다.

$$S = \frac{C_c}{1+e_0} \int_0^{H_0} \log\left(\frac{\gamma_{sub}z + \Delta\sigma_v'}{\gamma_{sub}z}\right) dz \quad (8)$$

$$= \frac{C_c H_0}{2(1+e_0)} \sum_{k=1}^n w(\xi_k) \log\left\{\frac{G(\xi_k) + \Delta\sigma_v'}{G(\xi_k)}\right\}$$

$$S = \frac{C_r}{1+e_0} \int_0^{H_0} \log\left(\frac{\gamma_{sub}z + \Delta\sigma_v'}{\gamma_{sub}z}\right) dz \quad (9)$$

$$= \frac{C_r H_0}{2(1+e_0)} \sum_{k=1}^n w(\xi_k) \log\left\{\frac{G(\xi_k) + \Delta\sigma_v'}{G(\xi_k)}\right\}$$

$$S = \frac{C_r}{1+e_0} \int_0^{H_0} \log\left(\frac{\sigma_p'}{\gamma_{sub}z}\right) dz + \frac{C_c}{1+e_0} \int_0^{H_0} \log\left(\frac{\gamma_{sub}z + \Delta\sigma_v'}{\sigma_p'}\right) dz \quad (10)$$

$$= \frac{H_0}{2(1+e_0)} \sum_{k=1}^n \left[C_r w(\xi_k) \log\left\{\frac{\sigma_p'}{G(\xi_k)}\right\} + C_c w(\xi_k) \log\left\{\frac{G(\xi_k) + \Delta\sigma_v'}{\sigma_p'}\right\} \right]$$

여기서, $G(\xi_k) = \frac{\gamma_{sub}H_0}{2}(1 + \xi_k)$ 이다.

4. 제안된 공식의 검증 및 적용

제안된 공식의 적용성 및 정확성을 분석, 검증하기 위하여 신호지방공단의 지반특성 및 지반개량시의 하중재하조건에 대하여 침하량을 산정하였다. 신호지방공단의 지반물성치는 초기간극비 1.8, 압축지수 0.6, 전체단위중량 16.5 kN/m^3 이며, 선행재하공법을 이용한 연약지반개량 시에 선행재하하중은 약 32 kPa, 층두께 40 m로서 이러한 조건의 침하량 산정에 있어서 깊이에 따른 초기유효응력 분포를 고려한 정해는 1.416 m로 계산된 바 있다(윤찬영 등, 2008). 점성토층 중앙부를 대표점으로 가정하고 침하량을 산정하는 기존의 침하량 산정방법과 가우스 적분법을 이용한 침하량 산정방법 결과를 비교한 결과는 다음 그림 1과 같다. 기존의 점성토층 중앙부를 대표점으로 가정하는 침하량 산정방법은 최종 침하량을 0.798 m로 산정하여 정해와의 오차율이 무려 77.4%로 나타났다. 이러한 오차는 점성토층을 몇 개의 층으로 분할하여 침하량을 산정하면서 점차 감소하지만 10개의 층으로 나누었을 때도 여전히 9.0%로 그 차이가 크게 나타난다. 반면에 가우스 적분법을 이용하면 2개의 층으로 나누었을 때 오차율은 29.1%로 나타나지만 층을 잘게 분할함에 따라서 기존의 방법에 비하여 훨씬 빠르게 정해에 접근하며 10개의 층으로 나뉘었을 때는 1.5%로 거의 정해와 동일하게 나타나는 것을 확인할 수 있다. 층분할에 따른 침하량 산정 결과와 정해와의 오차율을 정리하면 다음 표 2와 같다. 표 2에서 확인할 수 있는 바와 같이 기존의 방법과 가우스 적분법을 비교하였을 때 가우스 적분법이 정해에 접근하는 속도가 훨씬 빠르다. 이에 따라 기존방법 오차율을 가우스적분법의 오차율로 나눈 상대적 정확도 비율은 2개층으로 나뉘었을 때 1.42배에서 10개 층으로 나뉘었을 때는 5.85배로 나타나, 층을 나눌수록 정확도 차이가 커지며 가우스 적분법의 정해에 대한 수렴속도가 빠르다는 것을 확인할 수 있다.

이러한 분석결과로부터 기존의 침하량 산정방법과 가우스 적분법 모두 침하량을 과소평가하지만 가우스 적분법이 정해에 가까운 결과를 산정하며 층을 잘게 나눌수록 기존방법보다 더욱 빠르게 정해에 접근해 간다는 결론을 얻을 수 있다.

신호지방공단의 물성치를 근간으로 산정한 침하량에 대하여 식(8)의 적분식을 이용하여 양변을 $\frac{C_c H_0}{1+e_0}$ 로 나누어 깊이에 따라서 정규화된 침하량 분포를 계산하면 다음 그림 2와 같다. 즉, 지표면에 가까울수록 침하량이 크게 발생하며 깊이가 깊어질수록 침하량은 빠르게 감소한다. 이러한 이유 때문에 기존의 방법이 침하량을 과소평가하며 층을 나눌수록 정해에 수렴해가게 된다. 본 연구에서 적용된 가우스 적분법은 적분점과 가중치를 조절하여 적분계산의 정확도를 높이는 수치적 기법이다. 따라서 가우스 적분에 사용되는 적분점을 실제 대부분의 침하량이 발생하는 지표면 근처로 이동시키거나 지표면 근처의 적분점에 가중치를 증가시켜서 정해와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 단 2개의 층분할만으로도 정

해와 동일한 침하량을 산정할 수 있는 적분점 변환 및 가중치 변환을 trial-error 방법으로 산정하면 표 2와 같다. 앞서 언급한 바와 같이 가우스 적분에 사용되는 적분점을 지표면 근처로 변환하거나 지표면 근처의 적분점에 가중치를 증가시킴으로 인하여 2개의 층분할만으로도 정해와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 하지만 이러한 결과는 지반특성 및 하중재하조건 등 다양한 요인에 의하여 변화할 수 있으므로 정량적 변환기법을 확립하기 위해서는 추후 심도있는 연구가 필요할 것으로 판단된다.

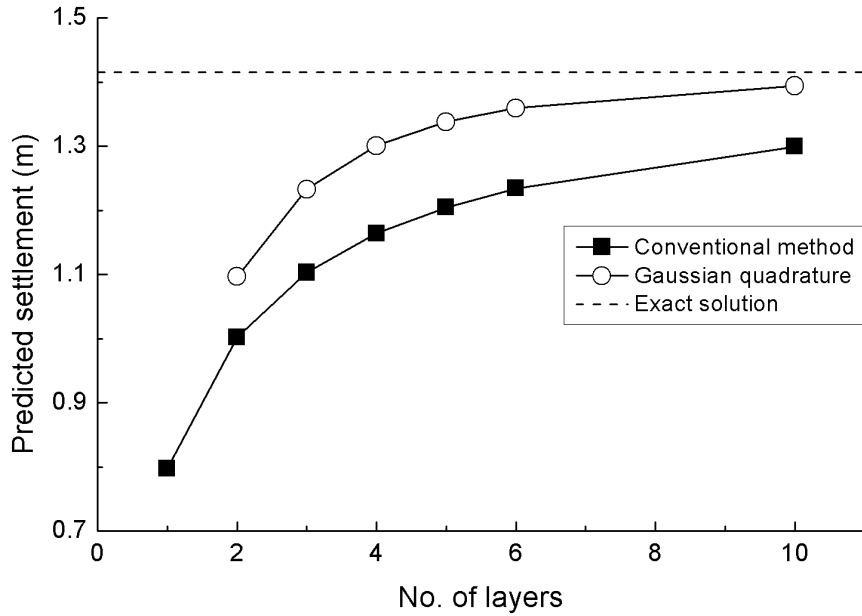


그림 1. 기존의 침하량 산정방법과 가우스 적분법을 이용한 침하량 산정 결과 비교

표 2. 기존방법과 가우스 적분법의 층분할에 따른 침하량 산정결과

층분할 수	기존방법		가우스적분법		상대적 정확도 비율
	침하량(m)	오차율(%)	침하량(m)	오차율(%)	
1	0.798	77.4			
2	1.003	41.2	1.097	29.1	1.42
3	1.103	28.3	1.233	14.8	1.91
4	1.164	21.6	1.301	8.8	2.45
5	1.205	17.5	1.338	5.8	3.01
6	1.234	14.7	1.360	4.1	3.56
10	1.299	9.0	1.394	1.5	5.85

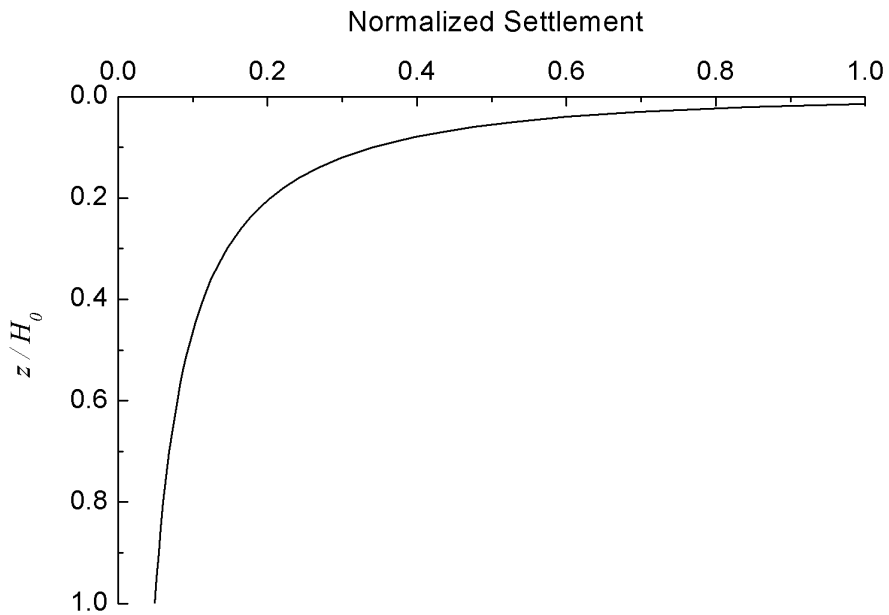


그림 2. 깊이에 따라 정규화된 침하량 분포

표 2. $n=2$ 일 때 정해를 얻기위한 적분점과 가중치의 변화

	n	적분점(ξ)	가중치
적분점 변화	2	-0.69059	1.00000
		+0.15475	1.00000
가중치 변화	2	-0.57735	1.48400
		+0.57735	0.67400

5. 결론 및 향후 연구과제

기존 1차원 압밀이론은 연약지반 설계에서 점토층 중앙부의 대표 응력점 하나로 대상층의 유효응력 상태를 가정하는 관행적 방법으로 인하여 설계 압밀침하량에 큰 오차를 발생시킬 수 있다. 하지만 깊이에 따라 변화하는 초기 유효응력을 고려하여 압밀침하량을 산정하기 위해서는 초기 유효응력 분포에 따라 정해를 계산해야 하며 이에 따라 정해계산에 많은 시간과 노력이 필요하게 된다. 본 연구에서는 1차원 압밀 침하량 산정식을 재고찰하였고, 가우스 적분법을 이용한 침하량 산정공식을 제시하였다.

제안된 공식의 적용성 및 정확성을 분석, 검증하기 위하여 신호지방공단의 지반특성 및 지반개량시의 하중재하조건에 대하여 침하량을 산정하고 기존 침하량 산정방법과 비교한 결과 기존의 침하량 산정방법과 가우스 적분법 모두 침하량을 과소평가하지만 가우스 적분법이 정해에 가까운 결과를 산정하며 층을 잘게 나눌수록 기존방법보다 더욱 빠르게 정해에 접근해 간다는 결론을 얻었다.

또한 단 2개의 층분할만으로도 정해와 동일한 침하량을 산정할 수 있는 적분점 및 가중치를 산정, 제시하였다. 하지만 이러한 적분점 및 가중치 변화는 지반특성 및 하중재하조건 등 다양한 요인에 의하여 변화할 수 있으므로 정량적 변환기법을 확립하기 위해서는 추후 심도있는 연구가 필요할 것으로 판단된다.

가우스 적분법은 일반적인 적분 방법이므로, 현장의 다양한 초기 유효응력 상태 및 경계조건을 고려하였을 때도 사용 가능한 압밀침하량 산정방법이며, 기존의 정해와 비교하였을 때 오차가 적고 간단한

형태로 제시되므로 향후 침하량 산정에서 폭넓게 활용가능하다고 판단된다.

참고문헌

1. 윤찬영, 김주형, 오명학, 정영훈(2008), 깊이 별 초기유효응력 차이를 고려한 1차원 압밀침하량 산정공식, **대한토목학회논문집**, 제 28권 제 5C호, pp. 273~282.
2. Das, B. M. (1984), Principles of Foundation Engineering, 3rd Edition, PWS Publishing Company, pp. 42-44.
3. Das, B. M. (2002), Principles of Geotechnical Engineering, Fifth Edition, Brooks/Cole.
Holtz, R. D. and Kovacs, W. D. (1981), An introduction to geotechnical engineering, Prentice-Hall, Inc. pp. 309-326.
4. Lambe, T. W. and Whitman, R. V. (1979), Soil Mechanics, SI Version, pp. John Wiley & Sons, Inc.
5. NAVFAC (1982), Soil Mechanics, DM-7.1, pp. 223-231.
6. Terzaghi, K. (1923), Dei Berechnug Der Darchlassigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamicschen pannungserscheinungen, Akademic der Wissenchafton In Wien, Sitzungsberichte, Mathematisch-Naturwissenschaftlichs, Klasse, PartIIa, Vol. 139, No. 3/4, pp.125-138.
7. Terzaghi, K., Peck, R. B. and Mesri, G. (1996), Soil mechanics in engineering practice, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc. pp. 106-108.