

정전계 해석을 위한 무요소법

이찬희*, 우동균**, 정현교**
기초전력연구원*, 서울대학교**

A meshfree method for electrostatic analysis

Chany Lee*, Dong-Kyun Woo**, Hyun-Kyo Jung**
Korea Electrical Engineering & Science Research Institute*, Seoul National University**

Abstract - 이 논문에서는, 편미분 방정식을 풀기위한 수치해석 기법들 가운데, 유한요소법과 달리 요소를 사용하지 않는 방법인 무요소법 중의 하나인 FMLSRKM을 소개하고자한다. 이 방법의 근사화 과정과 정전계 해석, 축대칭, 비균일매질에의 적용을 보임으로써 FMLSRKM이 훌륭한 근사해를 만들어낸다는 것을 검증하였다.

1. 서 론

현재까지 다양한 종류의 무요소법이 소개되었고, 연구가 활발히 진행되고 있다[1]-[4]. 무요소법은 일반적으로 복잡한 형상에서 정의된 편미분 방정식을 풀기위해 널리 이용되던 유한요소법(finite element method: FEM), 경계요소법(boundary element method: BEM) 등과는 달리 문제공간을 작게 나눈 요소를 사용하지 않고 단지 문제공간에 뿌려진 노드(node)들만 이용하여 방정식을 푸는 방법으로, 요소생성과정을 생략할 수 있고, 노드 생성이 쉽게 이루어질 수 있다는 장점을 가지고 있다. 대표적인 예로 element free galerkin method (EFG) [1], smoothed particle hydrodynamics (SPH) [2] 등의 방법들이 있는데, 이 논문에서는 fast moving least square reproducing kernel method (FMLSRKM)의 정식화 과정을 설명하고 간단한 문제에 대한 적용을 보여줌으로써 그 가능성을 검증하고자 한다.

2. FMLSRKM

FMLSRKM에서, 점 $\bar{\mathbf{x}}$ 와 주변에 있는 점 \mathbf{x} 에서 정의된 근사해는 다음과 같이 구할 수 있다 [3], [4].

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \bullet \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (1)$$

여기서 \mathbf{P}_m 은 m차의 다항식 기저벡터이고, $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 는 $\bar{\mathbf{x}}$ 에서의 계수벡터, ρ 는 dilation parameter이다. 만약 $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 가 해를 정확하게 표현하고 있다면 exact solution $u(\mathbf{x})$ 와 일치할 것이다. 하지만 $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 는 다항식으로 표현된 근사해일 뿐이므로 exact solution과 일치하지 못하게 되므로, 다음과 같이 점 $\bar{\mathbf{x}}$ 에서 error residual functional $J(\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}))$ 를 정의할 수 있다.

$$J(\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})) = \sum_{I=1}^{NP} \left| u(\mathbf{x}_I) - \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \bullet \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \right|^2 (1/\rho^n) \Phi \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \quad (2)$$

여기서 NP는 노드의 개수이고, n은 문제공간의 차원, $\Phi(\mathbf{x})$ 는 window function으로

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1 - \|\mathbf{x}\|)^t, & \text{when } \|\mathbf{x}\| < 1, t > 0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

와 같이 정의된다. Error residual을 최소화하기 위해서 식 (2)를 미분한 것을 0으로 두면

$$\sum_{I=1}^{NP} \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \left[u(\mathbf{x}_I) - \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \bullet \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \Phi_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad (4)$$

$$\Phi_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) = (1/\rho^n) \Phi \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right)$$

을 만족하는 $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 를 다음과 같이 구할 수 있게 된다.

$$\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) = M^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) u(\mathbf{x}_I) \Phi_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) \quad (4)$$

$$M(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \mathbf{P}_m^T \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \Phi_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}). \quad (5)$$

그러므로 식 (4)를 식 (1)에 대입하면 FMLSRKM을 통해 일정 영역에서 근사화된 해는

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{P}_m^T \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) M^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \Phi_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) u(\mathbf{x}_I). \quad (6)$$

이 된다. Point collocation 법을 이용하여 문제를 풀기 위해서는 고차 미분을 이용하여야 한다. 만약 라플라스 방정식을 푼다면 적어도 2차 미분까지 계산을 하여야하며 기저벡터의 다항식은 적어도 2차 이상의 차수를 가져야 한다. 일반적인 point collocation 법을 이용하는 무요소법에서는 수치미분을 계산하여 사용하지만, FMLSRKM에서는 형상함수 뿐 아니라 형상함수의 고차 미분까지 동시에 계산하기 때문에 계산 속도 면에서 이점이 있다. 근사해의 α 번째 미분은

$$D^\alpha U^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \left[D^\alpha \mathbf{P}_m^T \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \right] M^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \Phi_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) u(\mathbf{x}_I), \quad (7)$$

와 같이 나타낼 수 있고, 여기서 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ 이다. 미분이 적용되는 부분은 다항식과 관련된 부분이므로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} D^\alpha u(\mathbf{x}) &= \lim_{\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} D^\alpha U^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}} \mathbf{e}_\alpha^T M^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \Phi_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) u(\mathbf{x}_I) \\ &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I^{(\alpha)} u(\mathbf{x}_I) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서

$$\Psi_I^{(\alpha)} = \frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}} \mathbf{e}_\alpha^T M^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \Phi_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}). \quad (9)$$

를 α 번째 형상함수라고 정의하고 $\mathbf{e}_\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ 는 α 번째 단위벡터이다.

3. Point collocation 적용 및 해석

3.1 라플라스 방정식에 대한 적용

지배 방정식이 라플라스 방정식이고 고정 경계조건과 자연 경계조건이 주어진 다음과 같은 문제가 있다고 하자.

$$-\nabla^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

$$u = g \quad \text{in } \Gamma_D \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{in } \Gamma_N \quad (12)$$

여기서 $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ 이고 $\Gamma_D \cap \Gamma_N$ 는 공집합이다. 2차원 문제를 가정하고 x, y 를 공간변수라고 한다면 식 (10)은

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (13)$$

으로 바뀐다. 식 (13), (11), (12)에 point collocation 법을 적용시키면

$$-\sum_{x_j \in \Lambda_d} u_j (\Psi_j^{(2,0)}(x_j) + \Psi_j^{(0,2)}(x_j)) = 0 \quad \text{for all } x_j \in \Lambda_d \quad (14)$$

$$u_j = g(x_j) \quad \text{for all } x_j \in \Lambda_d \quad (15)$$

$$\sum_{x_j \in \Lambda_n} u_j (\Psi_j^{(1,0)}(x_j), \Psi_j^{(0,1)}(x_j)) \bullet \mathbf{n}(x_j) = 0 \quad \text{for all } x_j \in \Lambda_n \quad (16)$$

이 된다. 여기서 $\Lambda = \Lambda_i \cup \Lambda_d \cup \Lambda_n$ 이고 $\Lambda_i, \Lambda_d, \Lambda_n$ 는 각각 해석 공간의 내부, 고정경계조건, 자연경계조건에 해당되는 노드들의 집합이다. 또한, $\mathbf{n}(x_j)$ 는 $x_j \in \Lambda_n$ 인 노드에서 바깥방향으로 정의된 단위 법선벡터이다. $\Psi_j^{(2,0)}$ 는 x 에 대한 2차 미분과 y 에 대한 0차 미분된 점 x_j 에서의 형상함수를 의미한다. 모든 노드들에 대해 식 (14)-(16)을 적용시키

면 하나의 선형 방정식이 만들어지고, 그 해를 구하면 각 노드에서의 근사해가 구해진다.

검증으로 사용된 문제는 그림 1(a)와 같은 간단한 문제이다. 아래위로 0V와 100V가 걸려있는 공간 내에 유전체가 중간에 위치하고 있어 그 부분을 중심으로 포텐셜이 휘어지는 현상을 시뮬레이션 하였으며 (그림 1(c)) 유한요소법의 결과(그림. 1(b))와 비교해보아 매우 비슷한 해를 구할 수 있음을 확인하였다.

3.2 축대칭문제에 대한 적용

식 (10)의 라플라스 방정식이 축대칭의 문제공간의 지배방정식이면 r, z 의 공간변수를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (17)$$

위의 식에 point collocation 법을 적용시키면

$$-\sum_{x_j \in \Lambda_d} u_j(\Psi_j^{(2,0)}(x_j) + \Psi_j^{(0,2)}(x_j) + \Psi_j^{(1,0)}(x_j)/r) = 0 \quad \text{for all } x_j \in \Lambda_d \quad (18)$$

이 된다. 나머지 경계조건과 관련된 식 (15)-(16)은 그대로 적용시킬 수 있다. 축대칭에서의 검증을 위해 동축케이블을 모델링한 문제를 풀어보았다. 그림. 2(a)와 같이 z 방향으로 무한히 펼쳐진 동축케이블이 있다고 가정하면 케이블내의 포텐셜은 r 에 대해

$$V(r) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln(b/r). \quad (19)$$

의 값을 가진다. $V_0=100V, a=1.2mm, b=4.4mm$ 으로 설정하고, r 축상에 사용된 노드의 개수는 9개일 때, FMLSCKM의 결과를 그림. 2(b)에 그려놓았다. 식 (19)를 사용하여 그린 그림과 큰 차이가 없음을 확인할 수 있다.

3.3 비균일 매질에 대한 적용

Point collocation을 이용한 FMLSCKM을 비균일(inhomogeneous) 매질이 해석 공간에 존재하는 문제에 대해서도 적용시켜보았다. 그림. 2(a)에 그려진 문제에서

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0, \quad (20)$$

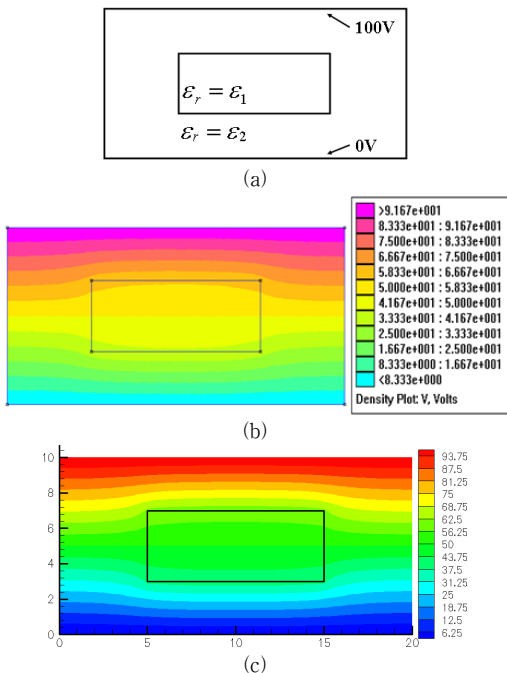
이 지배방정식이고, $\sigma = r^2$ 의 변화를 가지는 매질이 동축케이블의 [a b]를 채우고 있을 때, 해석하는

$$\phi = V_0 \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right). \quad (21)$$

와 같다. 식 (20)을 r, z 의 공간 변수를 사용하여 전개하면

$$\frac{\sigma}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (22)$$

와 같이 구해지는데 이 식에 point collocation 법을 적용시키면



〈그림 1〉 2차원 라플라스 방정식을 이용한 FMLSCKM의 검증 (a)검증모델 (b)유한요소법 결과 (c)FMLSCKM 결과

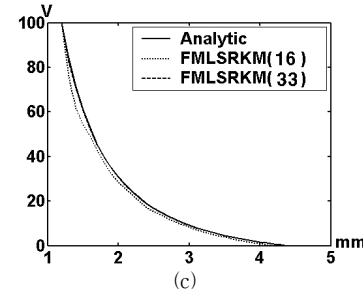
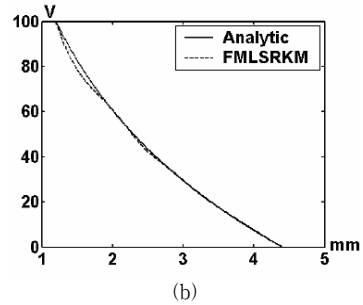
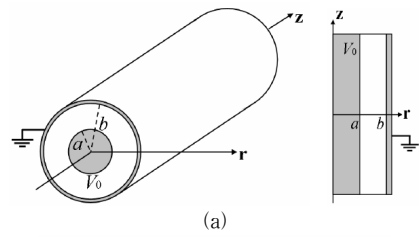
$$\sum_{x_j \in \Lambda_d} \phi_j [\sigma(x_j) \{ \Psi_j^{(2,0)}(x_j) + \Psi_j^{(0,2)}(x_j) + \Psi_j^{(1,0)}(x_j)/r \} + \sigma_r(x_j) \Psi_j^{(1,0)}(x_j) + \sigma_z(x_j) \Psi_j^{(0,1)}(x_j)] = 0 \quad \text{for all } x_j \in \Lambda_d \quad (23)$$

$$\sigma_r(x_j) = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \Big|_{x=x_j}, \quad \sigma_z(x_j) = \frac{\partial \sigma}{\partial z} \Big|_{x=x_j}$$

이 된다. 식 (23)과 경계 조건 식 (15)-(16)을 적용하여 FMLSCKM의 근사해를 구한 결과가 그림 2(c)에 나타나있다. 노드의 개수가 r 축을 따라 16개인 경우와 33개인 경우를 비교해보았는데, 노드의 개수가 증가하면 좀 더 정확하게 근사하는 것도 볼 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는, FMLSCKM이라는 무요소법을 소개하고 간단한 정전계문제에 적용해보으로써 FMLSCKM의 적용 가능성을 검증해보았다. 무요소법은 아직까지 유한요소법처럼 널리 사용되고 있지 않지만 연구가 좀 더 진행되고 적용대상이 넓어진다면 무요소법만이 가지는 특징을 살릴 수 있을 것으로 기대된다. 매우 큰 해석 공간 내부에 아주 작은 물체가 있는 문제나 곡면과 직선이 만나는 점점 부분처럼 요소 생성이 어려운 문제를 해결하는데 좋은 도구가 될 것으로 예상된다.



〈그림 2〉 축대칭문제의 검증을 위한 동축케이블 모델과 FMLSCKM의 결과 (a)검증모델 (b)균일매질의 결과 (c)비균일매질의 결과

[참 고 문 헌]

- [1] Y. Y. Lu, T. Belytschko, and L. Gu, "A new implementation of the element free Galerkin method", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 113, pp. 397-414, 1994
- [2] R. A. Gingold and J. J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars", *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 181, pp. 375-389, 1977
- [3] D. W. Kim, and Y. Kim, "Point collocation methods using the fast moving least square reproducing kernel approximation", *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, vol. 56, pp. 1445-1464, 2003
- [4] D. W. Kim, and H. K. Kim, "Point collocation method based on the FMLSCKM approximation for electromagnetic field analysis", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 1029-1032, 2004.