

해밀토니안의 시간 불연속 변분적분기를 이용한 탄소성 응력파 해석

조상순¹ · 허 훈[#]

Analysis of Elasto-Plastic Stress Waves by a Time-Discontinuous Variational Integrator of Hamiltonian

S. S. Cho, H. Huh

Abstract

This paper is concerned with the analysis of elasto-plastic stress waves by a time discontinuous variational integrator based on Hamiltonian in order to more accurate results in one dimensional dynamic problem. The proposed algorithm adopts both time-discontinuous variational integrator and space-continuous Hamiltonian so as to capture discontinuities of stress waves. This study enables to preserve total mechanical energy such as internal energy, kinetic energy and dissipative energy due to plastic deformation for long integration time. Finite element analysis of elasto-plastic stress waves is carried out in order to demonstrate the accuracy of the proposed algorithm.

Key Words : Propagation of elasto-plastic stress waves, time-discontinuous variational integrator, Hamiltonian

1. 서 론

충격부하를 받는 재료의 거동에 관한 연구는 이공학의 넓은 분야에 깊은 관계를 갖고 있다. 기계의 성능이 향상됨에 따라 기계의 작동속도가 높아지고 부재는 충격하중을 받으면서 그 기능을 다하도록 설계하는 것이 필수 요건이 되고 있다. 각종 교통기관에서는 충돌에 대한 안정성의 확보가 중요한 과제이고, 우주개발이나 에너지 관련 기기, 항공기 등의 안전설계에서도 내 충격성이 중요한 문제로 인식되고 있다. 이와 같이 충격문제에 관한 연구는 기기의 안전설계에서뿐만 아니라 충격부하에 의하여 수반되는 소재의 탄소성 거동 및 고속 소성가공법과 같은 전반적인 기계 산업에서 중요한 문제로 인식되고 있다[1].

탄성체에 충돌에 의한 동적인 하중이 작용하면 매질입자는 평형상태를 기준으로 진동을 하고, 매질을 통하여 입자의 진동이 전파하게 되는데 이를 응력파의 전파라 한다. 충격하중을 받은 부재의 내부하중은 응력파의 형태로 고체속을 전파

하고 이 응력파에 의한 응력장은 대체로 정하중에 의한 응력장과는 다른 특성을 보인다. 또한 응력파가 전파될 때 응력의 크기가 탄성범위를 벗어나게 되면 소성변형에 의한 소성 응력파가 발생하여 탄성 응력파를 따라 전파하게 된다. 일반적으로 소성 응력파는 탄성 응력파보다 매질내의 전파속도가 낮고, 탄성 응력파와 마찬가지로 반사, 간섭 및 회절을 일으키기 때문에 이론적으로 예측하기 어렵다.

고체내의 응력파의 거동을 나타내기 위한 지배방정식은 일반적으로 3차원이며 그 풀이 과정이 매우 복잡하여 1970년대부터 수치 해석적 방법이 개발되면서 응력파 전파에 관한 연구가 본격적으로 시작되었다. 고체내에 발생한 응력파의 거동을 나타내는 파동방정식의 수치해석 기법으로는 크게 유한요소법과 경계요소법으로 나눌 수 있다[2].

유한요소법은 현재 고체내의 응력파를 해석하기 위하여 가장 많이 사용되는 방법이지만, 응력파를 해석하는데 있어서 크게 두 가지의 어려움을 갖는다. 그 중 첫 번째는 응력파의 정해가 파

1. 한국과학기술원 기계공학과

교신저자: 한국과학기술원 기계공학과, hhuh@kaist.ac.kr

선단에서 불연속성 또는 특이점을 갖는 반면, 유한요소법을 사용하여 파동방정식을 수치 해석하는 경우 수치분산오차(dispersive error)나 소산오차(dissipative error)가 필연적으로 발생하여 파 선단부의 진폭이 현저하게 감소하게 된다. 또한 파 선단 또는 후미에 짧은 파들이 앞서거나 뒤따르게 되므로 응력과 선단부의 불연속성을 고려할 수 없으며 실제와 매우 다른 형상으로 전달되는 단점을 갖는다. 두 번째 문제점은 요소의 크기에 비하여 비교적 짧은 파장을 갖는 응력과가 전파되는 경우 응력파의 형상을 계속 유지하면서 전파시키기가 어렵다는 것이다[2].

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 고체내에 전파되는 탄소성 응력과 선단에서 발생하는 수치분산오차와 수치소산오차를 감소시킴으로써 응력파의 불연속성과 전파속도를 정확하게 계산하고자 한다. 수치분산 및 소산오차를 줄이기 위하여 시간영역에서의 불연속성(time-discontinuous)을 고려한 변분적분기(variational integrator)를 이용하였고 공간영역에서 해밀토니안(Hamiltonian)을 이산화하여 유한요소수식을 제안하였다.

2. 해밀토니안의 시간 불연속 변분적분기

2.1 해밀톤 법칙

고전적인 해석역학에서 해밀토니안은 식(1)의 라그랑지안(Lagrangian)으로부터 도출된다.

$$L = L(q, \dot{q}; t) = T - V \quad (1)$$

위의 식(1)을 르장드르 변환(Legendre's transformation)에 의하여 변수 $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$, $L(q, \dot{q}; t) \rightarrow H(q, p; t)$ 로 변환하고 다음 식(2)와 같이 정의한다.

$$H(q, p; t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

따라서 식(2)는 아래 식(3)과 같이 시스템이 갖는 전체 에너지로서 어떤 물체가 가지는 운동에너지와 위치에너지의 합으로 정의되며 이를 해밀토니안이라 한다.

$$H = H(q, p; t) = 2T - (T - V) = T + V \quad (3)$$

여기서 q 는 일반화좌표(generalized coordinate)를 p 는 일반화운동량(generalized momentum)을 나타내고, 일반화 좌표와 일반화 운동량을 묶어서 표

준변수(canonical variable)라 한다. 한편 일반화 좌표 q 는 대상으로 하는 계의 운동을 나타내는 임의로 변수를 선택할 수 있고 운동량 p 는 이에 따라 정해진다.

해밀토니안 운동의 경로는 기하학적으로 최단경로의 이동을 뜻한다. 이는 물체의 운동은 그 물체가 지나가는 두 시점 t_1, t_2 의 시점에서의 위치가 있다고 하면 그 사이의 시간에서 두 지점을 연결하는 최단거리를 따라가는 운동을 한다는 것이고 이를 해밀톤의 원리(Hamilton's principle)이라 한다. 수학적 관점에서 해밀토니안의 최단경로는 다르게 해석하면 변분법적 해석에서 총 길이로 생각되는 적분값을 최소값이 되게 하는 경로로서 식(4)의 변분으로서 해석이 된다.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (4)$$

예를 들어, 평면에서는 두 지점을 연결하는 직선은 1 개이고, 구 표면에서 두 지점을 연결하는 곡선은 대원을 따라 긴 곡선과 짧은 곡선이 있을 수 있지만 짧은 쪽을 택할 수 있으며 이러한 최단경로(extreme path)가 해밀토니안의 운동 경로가 된다.

2.2 해밀토니안의 유한요소수식화

본 연구에서는 1 차원 탄성봉에서의 파동방정식을 계산하기 위하여 우선 공간상의 절점에서 q 와 p 가 연속이라고 가정하고 해밀토니안을 이산화한다. 따라서 변위장과 속도장은 식(5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbf{Nq}^T = [N_1 \quad N_2] [q_1 \quad q_2]^T \\ v(x) &= \mathbf{Nv}^T = [N_1 \quad N_2] [v_1 \quad v_2]^T \end{aligned} \quad (5)$$

해밀토니안은 식(3)과 같이 운동에너지와 위치에너지의 합으로 구성된다. 따라서 우선 운동에너지부터 이산화하면 식(6)과 같이 연속영역 Ω 에서 정의 될 수 있다.

$$T = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \rho v d\Omega \quad (6)$$

또한 위치에너지는 내부에너지와 외력에 의한 외부에너지의 차로 정의되기 때문에 식(7)로 표현할 수 있다.

$$V = U - W$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u}) d\Omega - \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \right) \quad (7)$$

마지막으로 연속 공간의 해밀토니안을 정리하면 식(8)과 같이 정리할 수 있다.

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = T + V = T + (U - W)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_{\Omega} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \right)$$

, where $\mathbf{p} = \mathbf{M}\mathbf{V}$ (8)

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{\Omega} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{C} \nabla \mathbf{N} d\Omega$$

2.2 시간 불연속 변분적분기

본 연구에서는 기존의 변분적분기와 같은 절차를 이용하여 식(8)과 같이 정의된 해밀토니안을 적용한 작용적분을 정의하고, 이산화된 시간영역에서 변분적분기를 적용한 유한요소식을 유도하고자 한다. 이때 이산화된 시간영역의 각 절점에서 변위와 속도가 불연속이라 가정한다[3].

각 시간요소에서의 작용적분은 식(9)와 같이 이론적으로 1차 정확도의 적분을 할 수 있다.

$$S_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_{k-1}+\varepsilon}^{t_k+\Delta t} \left[\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) \right) \right] dt$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_{k-1}-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon} \left[\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) \right) \right] dt$$

$$\approx \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} \Delta t - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} - \Delta t V(\mathbf{q}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{p}^T \Big|_{t_{k-1}-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon} [\mathbf{q}]_{t_{k-1}} \quad (9)$$

따라서 k 번째 시간요소의 작용적분은 식(9)를 이용하여 식(10)과 같이 1차 정확도로 근사할 수 있다.

$$\hat{S}_{k+1} \equiv \frac{1}{2} (p_{k^+} + p_{k+1^-})^T (q_{k+1^-} - q_{k^+}) - \Delta t [T + V - S]$$

$$+ p_k^T (q_{k^+} - q_{k^-}) \quad (10)$$

위 식(10)에서 운동에너지 T 와 위치에너지 V 는 다음 식(11)과 같이 표현되고 이로부터 식(12)으로 내력(internal force vector)을 계산할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} (p_{k^+} + p_{k+1^-})^T M^{-1} (p_{k^+} + p_{k+1^-})$$

$$V(q_{k+1}) = \frac{1}{2} V(\alpha q_{k^+} + (1-\alpha)q_{k+1^-})$$

$$+ \frac{1}{2} V((1-\alpha)q_{k^+} + \alpha q_{k+1^-}) \quad (11)$$

$$F_{q_{k^+}}^{\text{int}} = \frac{\partial V}{\partial q_{k^+}} = \frac{1}{3} K(q_{k^+})q_{k^+} + \frac{1}{6} K(q_{k+1^-})q_{k+1^-}$$

$$F_{q_{k+1^-}}^{\text{int}} = \frac{\partial V}{\partial q_{k+1^-}} = \frac{1}{6} K(q_{k^+})q_{k^+} + \frac{1}{3} K(q_{k+1^-})q_{k+1^-} \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} : \text{Gaussian integration point}$$

본 연구에서는 변위와 속도에 대하여 시간 불연속을 적용하였을 뿐만 아니라 식(13)과 같이 응력파가 불연속일 때 발생하는 진동현상을 감소시키기 위하여 억제 운동에너지(suppressed kinetic energy)를 다음과 같이 정의하였다.

$$S \equiv \text{function} \left\{ \frac{\phi}{2} (p_{k^+} - p_{k+1^-})^T M^{-1} (p_{k^+} - p_{k+1^-}) \right\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_{k^+}} = \phi M^{-1} (p_{k^+} - p_{k+1^-}) \quad (13)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_{k+1^-}} = \phi M^{-1} (p_{k^+} - p_{k+1^-})$$

따라서 위의 식(10)의 작용적분에 1차 변분을 적용하면 식(14)와 같이 본 연구에서 제안된 새로운 유한요소식을 얻을 수 있다[4].

$$\delta \left(\sum_{k=0}^N \hat{S}_k \right) = 0$$

$$F_1^{\text{int}} + \frac{1}{2} M V_1 + \frac{1}{2} M V_2 = M V_0 + F_1^{\text{ext}}$$

$$F_2^{\text{int}} - \frac{1}{2} M V_1 + \frac{1}{2} M V_2 = F_2^{\text{ext}} \quad (14)$$

$$U_1 = U_0$$

$$U_2 = U_1 + \frac{\Delta t}{2} (1-4\phi) V_1 + \frac{\Delta t}{2} (1+4\phi) V_2$$

$$0 \leq \phi < \frac{1}{4}$$

3. 수치 해석

3.1 탄소성 응력파 전파의 유한요소해석



Fig. 1 One dimensional bar for an analysis of stress wave propagation.

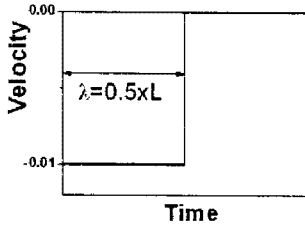


Fig. 2 Profile of the imposed velocity.

본 장에서는 탄소성 응력파의 해석을 통하여 식(14)와 같이 제안된 유한요소법과 기존의 유한요소법의 결과를 비교한다. 예제로서 Fig.1 과 같은 1 차원 봉을 채택하였다. Fig.1 의 1 차원 봉의 길이는 100mm 이고, 요소의 개수는 600 개로 일정한 간격으로 구성하여 한 요소의 길이 $L_e = 1/6mm$ 으로 하였다. 그리고 보의 우측은 고정단으로 가정하였으며, 탄성계수 $E = 200GPa$ 이고 밀도는 $\rho = 8000kg/m^3$ 으로 입력하였다.

또한 Fig.2 와 같이 1 차원 봉의 좌측 끝 단에 속도를 입력하여 부하-제하(load-unloading)의 조건이 발생하도록 하였으며, 탄소성 구성방정식은 식(15)와 같이 선형경화모델(linear hardening model)을 이용하였다.

$$\bar{\sigma} = 0.2 + 20\varepsilon^p [GPa] \quad (15)$$

Fig. 3은 기존의 유한요소법에 의한 해석 결과로서 탄성 응력파가 x-방향으로 전파되고, 소성 응력파가 탄성 응력파를 따라 x-방향으로 전파되는 것을 확인할 수 있다. 그러나 제하 발생 시 응력의 진동으로 인하여 정확한 응력을 예측할 수 없는 단점을 갖고 있다. 반면 Fig 4에서와 같이 본 연구에서 제안된 유한요소법의 결과는 제하가 발생하더라도 진동이 발생하지 않아 정확한 응력을 예측할 수 있는 장점을 가지고 있다.

4. 결론

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 고체내

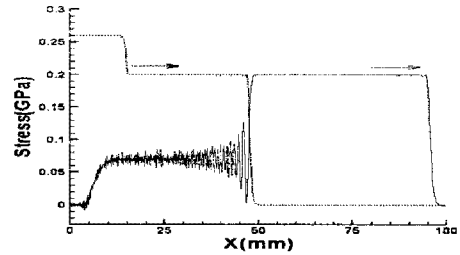


Fig. 3 The results of the conventional Finite Element Method.

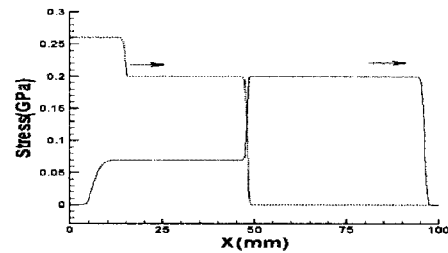


Fig. 4 The results of the time-discontinuous variational integrator of Hamiltonian

에 전파되는 탄소성 응력파 선단에서 발생하는 수치분산오차와 수치소산오차를 감소시키기 위하여 시간영역에서의 불연속성을 고려한 변분적분기를 적용하였고 해밀토니안을 이산화한 새로운 유한요소식을 제안하였다.

또한 1 차원 봉의 탄소성 응력파의 해석을 통하여 제안된 유한요소법이 탄소성 변형중에 발생하는 응력파등을 예측하는데 있어서 기존의 방법보다 더 정확한 것을 확인하였다.

참고 문헌

- [1] 양인영, 양동률, 이철민, 1995, 충격공학, 원창출판사.
- [2] I. Harari, 2004, Special issue on new computational methods for wave propagation, Wave Motion, Vol. 39, No. 4, pp.279~280.
- [3] B. Cockburn, 2003, Discontinuous Galerkin Method, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 83, No. 11, pp.731~754.
- [4] J. M. Wendlandt, J. E. Marsden, 1997, Mechanical integrator derived from a discrete variational principle, Physica D, Vol. 106, pp.223~246