충격모형 하에서의 시스템의 평균수명

유 영 관* · 박 노 국**

Abstract

In this study, the mean time to failures of a system under shock models are derived. The system receives shocks according to a stochastic process. The expected system lifetime under homogeneous Poisson shock process, nonhomogeneous Poisson shock process, and a general renewal shock process are derived. Some numerical examples are presented.

1. 서 론

시스템의 수명을 결정하는 요인은 매우 다양하다. 일반적으로 가장 흔히 거론되는 수명 요인으로는 운용시간(operating time)을 들 수 있으며, 이러한 조건 하에서 시스템의 평균수명과 최적 정비정책 등 시스템의 운용에 관계된 많은 연구가 이루어져 왔다.

운용시간 외에 또 다른 수명결정 요인으로는 시스템에 가해지는 충격(shock)을 들 수 있다. 즉, 시스템의 수명은 시간의 경과에 따라 시스템에 가해지는 충격으로 인해 결정된다는 이론이다. 시스템에 충격이 가해짐에 따라 시스템은 손상(damage)을 입게 되고 이러한 누적손상(cumulative damage)에 의해 시스템의 성능(performance)이 저하되고 이에 따라 운용비용(operating cost)이 증가하게 되어 결국 시스템의 수명이 다한다고 보는 것이다.

충격을 받는 시스템에 대한 확률적, 통계적 특성들은 연구자들의 관심이 되어 왔다.

Esary, Marshall 과 Proschan(1973)은 충격모형과 마모과정(wear process)에 대한 통계적 특성들을 분석하였다. Abdel-Hameed와 Proschan(1973)은 일반적인 재생과정에 의해 충격이 발생하는 상황에서의 시스템의 수명에 대한 통계적인 성질들을 분석하였다. Boland와 Proschan(1986)은 확률과정에 의한 충격을 받는 시스템에 대한 주기적인 교체정책(replacement policy)을 제시하였다. 충격이 발생하는 확률과정은 비제차 포아송과정을 따른다고 가정하였다. Abdel-Hameed(1986)는 Boland와 Proschan(1986)과 동일한 문제를 분석하였으나 충격의 발생은 일반적인 재생과정을 가정하였다. Balu와 Sabnis(1999)는 충격모형에서의 단봉성(unimodality) 특성에 대해 분석하였다.

* 한라대학교 경영학과

** 상지대학교 시스템경영공학과

Finkelstein과 Zarudnij(2001)는 충격이 누적되지 않는 상황에서의 시스템에 대한 통계적 특성들을 분석하였다. Chien과 Sheu(2006), Chien 등(2006)은 비제차 충격모형 하에서 최소수리를 포함하는 보전정책을 개발하였다. Chen과 Li(2008)는 재생 충격과정 하에서 충격횟수에 근거한 교체정책을 개발하였다.

본 연구에서는 시스템에 가해지는 충격의 도래시간(inter-arrival time)에 따른 시스템의 평균수명(expected life) 표현식을 구하고 그 의미를 살펴보고자 한다. 충격의 도래는 포아송과정(Poisson process)과 비제차 포아송과정(nonhomogeneous Poisson process), 그리고 일반적인 시간간격 분포인 재생과정(renewal process)을 따른다고 가정하고, 이러한 각 과정 하에서 시스템의 평균수명을 구하고자 한다. 본 연구의 결과는 충격의 도래에 따른 시스템의 누적손상 모델을 개발하고 최적 정비정책(maintenance policy)을 도출하는 데 기본적인 정보로 활용되어, 시스템 운용의 생산성을 높이고 산업 현장에서 사용되는 다양한 장비들의 운용관리에 활용될 수 있을 것이다.

2. 충격모형과 시스템의 평균수명

2.1 포아송 충격모형

충격의 도래가 포아송과정(Poisson process)을 따르는 경우의 시스템의 평균수명을 구한다. 충격의 도래가 포아송과정이라는 것은 충격과 충격 사이의 시간 분포가 지수분포(exponential distribution)인 경우를 의미한다. 지수분포는 시스템의 신뢰성 이론 분야에서 가장 널리 활용되는 분포로써 시스템의 수명관리와 운용정책에 대한 기본적인 정보를 제공해 준다.

포아송 충격과정에 대한 통계적 분석은 이미 많은 연구자들이 그 결과를 제시하여 왔다. Esary, Marshall 과 Proschan(1973)(이하 EMP)에서는 포아송 충격모형에 대한 분석과 통계적 특성들이 잘 정리되어 있다. 본 절에서는 EMP의 포아송 충격모형을 소개하고 시스템의 평균수명 식을 구한다.

시스템은 시간에 따라 충격을 받고, 그 충격은 포아송과정에 따라 도래한다. 포아송 충격과정의 도착율을 λ라고 하고 $(0,t]$ 동안의 충격 횟수를 $N(t)$라고 하면, $(0,t]$동안 k 번의 충격을 받을 확률은 다음과 같다.

$$P\{N(t)=k\}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}. \qquad (1)$$

시스템이 충격을 견딜 확률을 다음과 같이 정의 하면

$$\overline{P}_k = P\{surviving\ k\ shocks\},\ \ 1=\overline{P}_0 \geq \overline{P}_1 \geq \ldots\ldots, \qquad (2)$$

시스템이 k번째 충격에서 고장 날 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$p_0 = 1 - \overline{P_0},\ \ p_k = \overline{P}_{k-1} - \overline{P}_k,\ k = 1, 2, ... \tag{3}$$

그러면 시스템의 생존함수(survival function)는 다음과 같이 표현된다.

$$\overline{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P_k} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},\ \ t \geq 0. \tag{4}$$

식 (4)는 시스템이 시간 t 이상 생존할 확률을 나타내며 EMP의 연구와 그 후속 연구에서 중요한 역할을 한다.

이상의 EMP의 기본적인 포아송 충격모형을 바탕으로 시스템의 평균수명을 구하여 보자. 이제 새로운 이산확률변수 K를 "시스템이 고장 날 때까지 받는 충격의 횟수"로 정의 하자. 이미 확률변수 K에 대한 정의는 (2)와 (3)에서 설명된 바 있다. 즉,

$$P\{K = k\} = p_k,\ P\{K > k\} = \overline{P}_k \tag{5}$$

이다. 연속확률변수에서와 마찬가지로 이산확률변수 K의 평균은 식(5)로부터 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$E[K] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k. \tag{6}$$

시스템의 평균수명은 식(4)를 적분하면 얻을 수 있다. 즉, 시스템의 수명을 확률변수 L이라고 하면

$$\begin{aligned}
E[L] &= \int_0^{\infty} \overline{H}(t)\,dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{P}_k}{k!} \lambda^k \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^k\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{P}_k}{k!} \lambda^k \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^{k+1}} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k.
\end{aligned} \tag{7}$$

이때 도착율이 λ인 포아송과정에서 도착사이의 평균시간 간격은 $1/\lambda$이고, 식(6)를 참조하면 식(7)의 뒷부분은 확률변수 K의 평균이므로 식(7)은,

$$E[L] = \frac{1}{\lambda} \times E[K]$$

=(충격 사이의 평균시간 간격)×(충격의 평균횟수)

의 관계가 성립함을 알 수 있다.

<예제 1> 충격이 도착율 $\lambda = 2/year$인 포아송과정에 따라 도래한다고 하자. 또한 K의 분포가 기하분포 $f(x) = p(1-p)^{x-1},\ x = 1, 2, ...$를 따른다고 하자. 만약 $p = 0.2$라면 $E[K] = 1/p = 1/0.2 = 5$ 이고 $1/\lambda = 1/2$ 이므로, 시스템의 평균수명은 $E[L] = 0.5 \times 5 = 2.5$(년)이 된다.

2.2 비제차 포아송 충격모형

충격의 도래가 비제차 포아송과정인 경우는 제차(homogeneous)포아송과정에 비해 좀 더 일반적인 상황이라고 할 수 있다. 정비이론에서 비제차 포아송모형은 소위 최소수리(minimal repair)모형에서 고장발생 과정을 묘사하는데 활용되는 중요한 확률과정이다.

충격의 도착률이 시간 t에서 $\lambda(t)$인 비제차 포아송과정을 따른다고 가정하자. 그러면 이 충격과정의 mean value function은

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x)dx \tag{8}$$

로 정의되며, 이 식은 $(0,t]$ 사이의 평균 충격횟수로 해석된다. 또한 최소수리 정비모형에서는 시간 t에서의 도착률 $\lambda(t)$를 고장율함수로 해석하며, 식 (8)은 평균 최소수리횟수로 해석되기도 한다. 포아송과정과 마찬가지로 $(0,t]$ 동안의 충격 횟수를 $N(t)$라고 하면, $(0,t]$동안 k번의 충격을 받을 확률은

$$P\{N(t) = k\} = \frac{e^{-\Lambda(t)}\Lambda(t)^k}{k!}$$

이다. 따라서 식(4)의 시스템의 생존함수는 다음과 같이 변형된다.

$$\overline{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P_k} \frac{e^{-\Lambda(t)}\Lambda(t)^k}{k!},\ \ t \geq 0. \tag{8}$$

시스템의 평균수명은 식(8)을 적분하여 다음 식으로 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
E[L] &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k \frac{e^{-\Lambda(t)}\Lambda(t)^k}{k!}dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k \int_0^\infty \frac{e^{-\Lambda(t)}\Lambda(t)^k}{k!}dt. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

이제 확률변수 $X_n, n=1,2,....$을 충격과 충격 사이의 시간간격이라고 하자. 즉, X_1은 첫 번째 충격까지의 시간, X_2는 첫 번째 충격과 두 번째 충격 사이의 시간 등이다. 그러면 식 (9)의 뒷 부분은 Nakagawa와 Kowada(1983)로부터 k번째와 (k+1)번째 충격 사이의 평균시간임을 알 수 있다. 즉,

$$
E[L] = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k E[X_{k+1}] \qquad (10)
$$

$$
= \sum_{k=0}^{\infty} (k\text{번째 충격을 견딜 확률}) \times (k\text{번째와 } (k+1)\text{번째 충격 사이의 평균시간})
$$

의 표현식으로 정리됨을 알 수 있다.

2.3 재생 충격모형

충격의 도래시간 분포에 아무런 가정이 없는 일반적인 시간분포인 경우의 시스템의 평균수명을 구해보자. 충격이 재생과정(renewal process)에 따라 도래한다는 것은 충격과 충격 사이의 분포가 일반적인 분포라는 것을 의미한다.

이제 $N(t)$를 $(0,t]$ 사이의 충격 횟수, X를 충격과 충격 사이의 시간 간격, $F(t)$를 X의 분포함수, $F^{(k)}(t)$를 $F(t)$의 kth convolution으로 정의하자. 그러면 재생이론으로 부터

$$
\begin{aligned}
\overline{H}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k \left[F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k F^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k F^{(k+1)}(t) \\
&= \overline{P}_0 F^{(0)}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{P}_k F^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k F^{(k+1)}(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_{k+1} F^{(k+1)}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_{k} F^{(k+1)}(t) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\overline{P}_{k} - \overline{P}_{k+1}\right) F^{(k+1)}(t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k - \sum_{k=0}^{\infty} p_{k+1} F^{(k+1)}(t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left[1 - F^{(k)}(t)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \overline{F}^{(k)}(t).
\end{aligned}
$$

따라서 시스템의 평균수명은

$$
\begin{aligned}
E[L] &= \int_0^{\infty} \overline{H}(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \int_0^{\infty} \overline{F}^{(k)}(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k E[X_1 + \ldots.. + X_k] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k k E[X] \\
&= E[K]E[X]
\end{aligned}
$$

=(충격의 평균횟수)×(충격 사이의 평균시간 간격)

의 형태로 표현됨을 알 수 있다.

<예제 2> 충격과 충격 사이의 시간분포가 평균이 0.5(년)인 정규분포를 따른다고 하자. 또한 K의 분포가 기하분포 $f(x) = p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots.$를 따른다고 하자. 만약 $p = 0.2$라면 $E[K] = 1/p = 1/0.2 = 5$ 이므로 시스템의 평균수명은 $E[L] = 0.5 \times 5 = 2.5$ (년)이 된다. 이 결과를 <예제 1>의 포아송과정인 경우와 비교해 보면 시스템의 평균수명이 2.5(년)으로 동일하다는 것을 알 수 있다.

3. 결 론

본 연구에서는 충격이 확률적 과정으로 도래하는 시스템의 평균수명을 도출하였다. 충격과정이 포아송과정인 경우, 비제차 포아송과정인 경우, 그리고 일반적인 재생과

정인 경우에 대해 각각 시스템의 평균수명 식을 도출하였다. 포아송과정과 재생과정의 경우에는 시스템의 평균수명 식이 매우 간단하게 표현될 수 있음을 보였다. 비제차 포아송과정의 경우에도 더욱 간단한 표현식의 도출이 가능할 것이며, 이는 추후 연구과제로 남긴다. 각 충격과정 하에서의 다양한 정비모형이 개발될 수 있으며, 이 역시 추후 연구과제로 남긴다.

4. 참 고 문 헌

[1] Abdel-Hameed, M., "Optimum replacement of a system subject to shocks", *Journal of Applied Probability*, Vol.23, pp107-114, 1986

[2] Abdel-Hameed, M., Proschan, F., "Nonstationary shock models", *Stochastic Processes and Their Applications*, Vol.1, pp383-404, 1973

[3] Barlow, R., Proschan, F., *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, New York, 1965

[4] Balu, M.N., Sabnis, S.V., "Preservation of unimodality under shock models", *Naval Research Logistics*, Vol.46, pp952-957, 1999

[5] Boland, P., Proschan, F., "Optimum replacement of a system subject to shocks", *Operations Research*, Vol.31, pp697-704, 1983

[6] Chen J., Li, Z., "An extended extreme shock maintenance model for a deteriorating system", *Reliability Engineering and System Safety*, Vol.93, pp1123-1129, 2008

[7] Chien, Y., Sheu, S., "Extended optimal age replacement policy with minimal repair of a system subject to shocks", *European Journal of Operational Research*, Vol.174, pp169-181, 2006

[8] Chien, Y., Sheu, S., Zhang, Z., Love, E., "An extended optimal replacement model of systems subject to shocks", *European Journal of Operational Research*, Vol.175, pp399-412, 2006

[9] Esary, J., Marshall, A., Proschan, F., "Shock models and wear processes", *The Annals of Probability*, Vol.1, pp627-648, 1973

[10] Finkelstein, M.S., Zarudnij, V.I., "A shock process with a non-cumulative damage", *Reliability Engineering and System Safety*, Vol.71, pp103-107, 2001

[11] Nakagawa, T., Kowada, M., "Analysis of a system with minimal repair and its application to replacement policy", *European Journal of Operational Research*, Vol.12, pp176-182, 1983

[12] Ross, S., *Stochastic processes*, John Wiley & Sons, New York, 1983