

스톡스 유동장 내의 한 쌍의 소오스-싱크에 의한 자유표면 유동해석

정재택*, 박종선**

Analysis on the free surface flow induced by a pair of source-sink in Stokes flow

Jae-Tack Jeong*, Jong-Sun Park**

Key Words : Free surface(자유표면), Cusp(첨점), Source(소오스), Sink(싱크), Viscous flow(점성유동), Surface tension(표면장력), Capillary number(캐필러리수), Conformal mapping(등각사상)

Abstract

Two-dimensional Stokes flow due to the line source and line sink of same strength in semi-infinite flow region with free surface is analysed using complex variable theory and conformal mapping. Surface tension effects are included while gravity is neglected. From the results of analysis, flow pattern and free surface shape are obtained and velocity distribution on the free surface is determined with 2 independent parameters Ca (capillary number) and h (non-dimensionalized distance between source and sink). When the location of the sink is above the source, velocity on the free surface converges and a cusp occurs on the free surface for the value of Ca above some critical capillary number.

1. 서론

뉴우톤 유체 또는 비 뉴우톤 유체의 저 레이놀즈 유동에서 자유표면상에 발생하는 커스프(cusp; 첨점) 현상이 Joseph[1] 등에 의하여 발표된 이래로 자유표면의 변형과 커스프에 대한 이론적 및 실험적 연구가 최근 많이 진행되고 있다.[2,3] Joseph[1]의 실험에서 관찰된 바에 의하면 자유표면의 유동이 모아지는 지점에서 2차원의 날카로운 커스프가 생성되며 이 커스프는 유동의 특이점을 나타내는 흥미로운 현상이다.

이와 같이 자유표면상에 나타나는 커스프는 유동장의 특이성(singularity)이므로 해석적으로 매우 흥미로운 현상일 뿐만 아니라, 커스프를 통하여 자유표면 주위의 공기가 유입될 수 있다는 점에서 박막코팅, 화학반응 등 응용 측면에서 매우 중요한 의미를 갖는다.

이 커스프 주위의 유동을 실험적으로 구현하기 위하여 Jeong & Moffatt[4]는 뉴우톤 유체 내에서 실린더를 서로 반대 방향으로 회전시켜 양쪽에서 중심으로 향하는 자유표면의 변형을 관찰하였다. 그 결과 실린더의 회전각속도가 어떤 임계 각속도 이상에서는 자유표면상에 육안으로 관측되는 커스프가 형성되었다. 이와 같이 자유표면에 나타나는 유동특이점인 커스프를 해석하기 위하여 Jeong & Moffatt[4]는 문제를 이론적으로 해석하여 커스프의 형성과정을 규명하기 위하여, 자유표면이 있는 유동장내에서 서로 반대 방향으로 회전하는 두 실린더를 하나의 2극 보

텍스(vortex dipole)로 이상화한 문제를 해석하였다. 여기서 2극 보텍스의 방향은 자유표면에 수직으로 향하며 2극 보텍스의 세기에 따라 자유표면의 변형을 조사하여 커스프의 형성을 고찰하였다. 그 결과 $Ca \rightarrow \infty$ 일 때, 자유표면의 중앙점에서 곡률반경이 0으로 접근하면서 자유표면에 커스프가 형성됨을 보였다. 계속하여 Jeong은 2극 보텍스의 방향이 임의인 경우[5]와 2극 보텍스 대신 소오스(source) 또는 싱크(sink)가 있는 경우[6]에 대하여 해석하였다.

본 논문에서는 선행의 연구를 확장하여 자유표면 아래 같은 세기의 소오스와 싱크가 놓여있는 Stokes 유동에서 자유표면의 변형과 커스프의 형성과정에 대하여 논의한다. 이 경우 소오스와 싱크 사이의 거리가 매우 가까우면 2극 보텍스로 볼 수 있는 반면, 그 거리가 매우 커지면 단일 소오스 또는 단일 싱크의 경우로 볼 수 있다. 해석의 방법으로 복소해석함수 이론과 등각사상(conformal mapping)이 사용되었으며 비선형 적분방정식을 풀어 사상함수를 결정하였다.

2. 방정식의 구성 및 경계조건

Fig.1과 같은 (x,y) 직각좌표계에서 $y < 0$ 인 반무한영역에 놓인 유동장에 대하여 생각하자. 복소변수 $z=x+iy$ 로 둘 때, 자유표면(Γ)으로부터의 깊이 d 인 곳($z=id$)에 세기 k 인 소오스(source)가 깊이 $d(1+h)$ 인 곳에 세기 k 인 싱크(sink)가 각각 놓여 있을 때 이로부터 유동장이 형성되어 자유표면은 변형된다. 이 문제에서 길이 스케일은 d 가 유일하므로 d 를 단위길이 1로 놓을 수 있다. ($d=1$). 세기가 음(-)인 소오스는 같은 세기의 싱크로 볼 수 있

* 전남대학교 기계시스템공학부 jtjeong@chonnam.ac.kr

** 전남대학교 대학원 기계공학과 terevy@naver.com

으므로 $k < 0$ 인 경우는 소오스와 싱크가 바뀌어 놓인 것으로 간주할 수 있다. 유동의 레이놀즈 수 ($Re \equiv |k|/\nu$)가 충분히 작은 경우, 유동 지배방정식의 관성항은 점성항에 비하여 작으므로 무시되고, x와 y방향의 유동속도 성분을 각각 u, v 라 할 때

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1)$$

로 되는 유동함수(stream function) Ψ 는 다음의 biharmonic 방정식을 만족한다.

$$\nabla^4 \Psi = 0. \quad (2)$$

그런데, 이 biharmonic 방정식의 해 Ψ 는 일반적으로 다음과 같이 2개의 복소해석함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.[7]

$$\Psi = \text{Im}[f(z) + \bar{z}g(z)] \quad (3)$$

여기서 $f(z)$ 와 $g(z)$ 는 2극 보텍스의 특이성을 띠는 $z = -i$ 점을 제외하고 모든 유동영역에서 해석적이다. 유동의 속도성분 u, v 도 $f(z)$ 와 $g(z)$ 로 나타내면

$$u - iv = f'(z) + \bar{z}g'(z) - \overline{g(z)}, \quad (4)$$

로 되고 유동장내의 압력 p 와 와도(vorticity) ω 는 다음과 같이 표현된다.

$$p - i\mu\omega = 4\mu g'(z) \quad (5)$$

여기서 μ 는 유체의 점성계수이다. 따라서, 2개의 복소함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 를 구하면 유동장을 모두 해석한 것이 된다. $f(z)$ 와 $g(z)$ 를 구하기 위한 경계조건은 다음과 같이 된다.

1) 자유표면상에서 ($z \in \Gamma$)

①속도 경계조건 : 자유표면에서의 유속은 항상 자유표면에 접하므로 식(4)로부터

$$f'(z) + \bar{z}g'(z) - \overline{g(z)} = u_0(z) \left(\frac{dz}{ds} \right). \quad (6)$$

여기서 $u_0(z)$ 는 자유표면상의 접선방향 유동속도로 아직 미지함수이다.

②응력 경계조건 : 자유표면에 수직방향의 응력은 표면장력과 평형을 이루는데 이 조건을 식(4)와 (5)를 이용하여 유도하면[7]

$$f'(z) + \bar{z}g'(z) + \overline{g(z)} = -i \frac{\gamma}{2\mu} \left(\frac{dz}{ds} \right) \quad (7)$$

로 된다. 여기서, γ 는 유체의 표면장력계수이다.

또한, 식(6)과 (7)을 결합하여 다른 형태로 나타내보면 다음과 같다.[7]

$$f(z) + \bar{z}g(z) = 0, \quad (8)$$

$$\text{Im} \left[\left(\frac{dz}{ds} \right) g(z) \right] = \frac{\gamma}{4\mu} \quad (9)$$

2) $z = -i$ 와 $z = -i(1+k)$ 에서의 소오스와 싱크에 의한 특이성은 각각

$$f(z) \rightarrow k \ln(z+i), \quad (10a)$$

$$f(z) \rightarrow -k \ln\{z+i(1+k)\} \quad (10b)$$

로 표현된다.

3) 무한원 ($|z| \rightarrow \infty$)에서 유동은 정지상태 이므로, 속도 성분 u 와 v 는 0이고 이 조건으로부터

$$f(z) \rightarrow -\frac{i\gamma}{4\mu} z, \quad g(z) \rightarrow \frac{i\gamma}{4\mu}, \quad (11)$$

3. 해석의 방법

어떤 등각사상함수 $z = \omega(\zeta)$ 에 의하여 z 평면 내의 유동장이 ζ 평면의 단위원 내부로 Fig.1과 같이 사상된다고 하자.

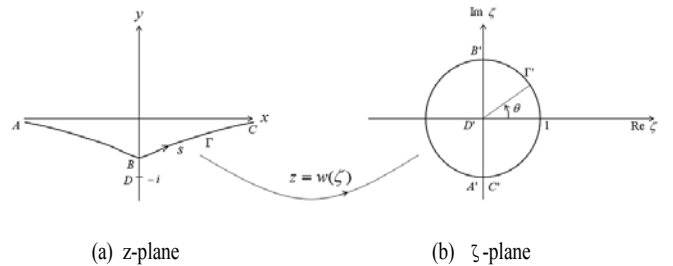


Fig.1 Free surface deformation with a pair of source-sink and conformal mapping into the unit circle.

이 변환에 의하여 z 평면에서의 미지함수 $f(z), g(z), u_0(z)$ 는 ζ 평면에서 각각 다음과 같이 변환된다.

$$F(\zeta) \equiv f(\omega(\zeta)) = f(z) \quad (12)$$

$$G(\zeta) \equiv g(\omega(\zeta)) = g(z) \quad (13)$$

$$U(\zeta) \equiv u_0(\omega(\zeta)) = u_0(z) \quad (14)$$

또한,

$$f'(z) = \frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad g'(z) = \frac{G'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (15)$$

$$\frac{dz}{ds} = -i\zeta \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \quad (16)$$

$$\overline{\left(\frac{dz}{ds} \right)} = \frac{i}{\zeta} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} \quad (17)$$

로 된다. 따라서, 경계조건식 (4), (5)를 ζ 평면에서 나타내면, $|\zeta| = 1$ 에서, 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \overline{\omega(\zeta)} \frac{G'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \overline{G(\zeta)} = U(\zeta) \frac{i}{\zeta} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} \quad (18)$$

$$\frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \overline{\omega(\zeta)} \frac{G'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \overline{G(\zeta)} = \frac{\gamma}{2\mu\zeta} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} \quad (19)$$

식(18), (19)에서 $F(\zeta)$ 를 소거하고 Cauchy의 적분정리[8]를 적용하면, $|\zeta| < 1$ 에서 $G(\zeta)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{G(\zeta)}{\zeta\omega'(\zeta)} = \frac{G(0)}{\omega'(0)} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\gamma}{4\mu|\omega'(\zeta_0)|} \frac{\zeta_0 + \zeta}{\zeta_0(\zeta_0 - \zeta)} d\zeta_0 \quad (20)$$

식(20)에 포함되어 있는 등각사상함수 $\omega(\zeta)$ 와 $G(0)$ 는 아직 미지이다.

한편, 경계조건(8)을 ζ -평면에서 표현하여 Cauchy의 적분정리[8]를 적용하면, $|\zeta| < 1$ 에서,

$$F(\zeta) = -\omega^*(\zeta) G(\zeta) = -\overline{\omega(1/\zeta)} G(\zeta) \quad (21)$$

로 표현할 수 있다. 식(21)과 경계조건 (10)을 주의 깊게 비교하면 적절한 등각사상함수 $\omega(\zeta)$ 의 형태를 다음과 같이 제안할 수 있다.

$$z = \omega(\zeta) = \left[\int_0^\lambda \frac{ib(t)\zeta}{\zeta t + i} dt + i \frac{\zeta - i}{\zeta + i} - iJ \right] / (J+1), \quad (22)$$

$$J \equiv \int_0^\lambda \frac{b(t)}{t-1} dt$$

식(22)는 $w(0) = -i$ 를 만족하고 있으며, $\zeta \rightarrow -i$ ($|\zeta|=1$)일 때, $Im(z) \rightarrow 0$ 이다. 식(22)에 포함되어 있는 미지의 실함수 $b(t)$ ($0 < t < \lambda$)가 구해지면 문제에 주어진 h 에 대하여

$$w(-i\lambda) = -i(1+h) \quad (23)$$

를 만족하는 실수 λ ($0 < \lambda < 1$)를 구할 수 있다. 주어진 h 또는 λ 에 대하여 경계조건 (10), (11)을 만족시키기 위하여 $b(t)$ ($0 < t < \lambda$)는 다음의 비선형 적분방정식을 만족해야 한다.

$$\frac{1}{b(t)} = \frac{\omega'(-it)(1-t^2)(1-t)^2}{16\pi Ca(J+1)} \times \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|\omega'(e^{i\theta})|(1+\sin\theta)(2t\sin\theta+1+t^2)} \quad (24)$$

여기서 capillary 수 $Ca \equiv \mu k / \gamma d$ 이고, k 는 $z = -i$ 에 있는 소스(source)의 세기이다. 적분방정식 (24)로부터 $b(t)$ 를 구하여 식(22)에 대입하면 등각사상함수 $\omega(\zeta)$ 가 구해지며 식(20), (21)로부터 $G(\zeta)$ 와 $F(\zeta)$ 를 각각 나타낼 수 있다.

$$G(\zeta) = -\frac{\beta}{32\pi Ca} \omega'(\zeta) \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) (\zeta + i)^2 I(\zeta; b(t)), \quad (25)$$

여기서

$$I(\zeta; b(t)) \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|\omega'(e^{i\theta})|(1+\sin\theta)(\sin\theta - \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i})}$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{J+1} \left\{ \int_0^\lambda \frac{ib(t)}{t-i\zeta} dt - i \frac{\zeta - i}{\zeta + i} - iJ \right\} G(\zeta). \quad (26)$$

결국, ζ 평면에서 $F(\zeta)$ 와 $G(\zeta)$ 를 구하였으며, 이것은 유동장을 표현하는 z 평면에서의 두 복소함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 를 구한 것이 되고 따라서 전체 유동장이 해석되었다.

4. 결과

주어진 Ca 와 h (또는 λ)에 대하여 $b(t)$ 에 관한 적분방정식 (24)를 풀기 위하여 반복법(iterative method)을 사용하였다. 구해진 결과로부터 자유표면의 형상과 유선 등을 Ca 와 h 의 변화에 따라 구할 수 있다.

1) 자유표면의 변형

식(22)의 등각사상에서 ζ 평면의 단위원($|\zeta|=1$)이 z 평면의 자유표면에 대응하므로, $\zeta = e^{i\theta}$ 로 놓으면 다음의 매개변수형 자유표면의 방정식이 얻어진다.

$$\begin{cases} x = \frac{\cos\theta}{J+1} \left\{ \int_0^\lambda \frac{b(t)}{t^2+2t\sin\theta+1} dt + \frac{1}{1+\sin\theta} \right\}, \\ y = \frac{1}{J+1} \left\{ \int_0^\lambda \frac{b(t)(t+\sin\theta)}{t^2+2t\sin\theta+1} dt - J \right\}. \end{cases} \quad (27)$$

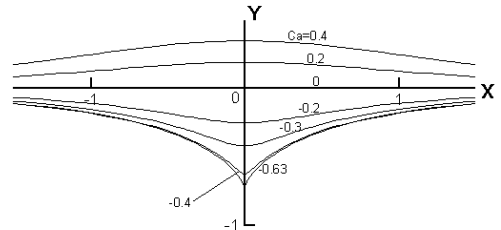


Fig.2 Free surface shapes for some values of Ca for $h=0.3$.

식(27)로부터 $h=0.3$ 일 때, 몇 가지 Ca 값에 대한 자유표면의 형상을 Fig.2에 나타내었다. $Ca < -0.63$ 인 경우는 (24) 적분 내 함수의 변화가 심하기 때문에 $b(t)$ 의 수렴해를 구하기가 어렵다. $Ca = -0.63$ 인 경우(Fig.2) 자유표면의 중앙에 cusp(첨점)가 발생한 것처럼 보이나 실제로는 작은 곡률반경을 갖고 있다. 아마도, $Ca \rightarrow \infty$ 일 때 (24)의 해는 곡률반경 $R \rightarrow 0$ 이 되는 진정한 cusp를 나타낼 것이다. 또한, $Ca \rightarrow 0$ 일 때 식(24)는 $b(t) \rightarrow 4(J+1)Ca$ 로 되며, 따라서 식(27)은

$$y \sim 2Ca \ln \left\{ \frac{x^2 + (1+h)^2}{x^2 + 1} \right\} \quad (28)$$

로 되며, 이는 본 문제의 선형해와 일치한다.

3) 유동의 형태

식(3),(25),(26)를 이용하여 유동함수 Ψ 를 유도하면, ζ 평면에서,

$$\Psi = (1 - \zeta\bar{\zeta}) \operatorname{Im} \left[G(\zeta) \left\{ \int_0^\lambda \frac{b(t)/(J+1)}{(t-i\zeta)(\bar{\zeta}t-i)} dt + \frac{2i}{|\zeta+i|^2} \right\} \right] \quad (29)$$

로 된다. 유동함수식 (29)를 $h=0.3$ 이고 $Ca=0.4, 0, -0.3, -0.63$ 인 경우에 각각 계산하여 유선의 형태를 Fig.3(a)-(d)에 도시하였다. $Ca \rightarrow \infty$ 일 때 자유표면의 중앙점에서 곡률반경 $R \rightarrow 0$ 으로 되어 커스프(cusp)가 형성됨을 알 수 있다.

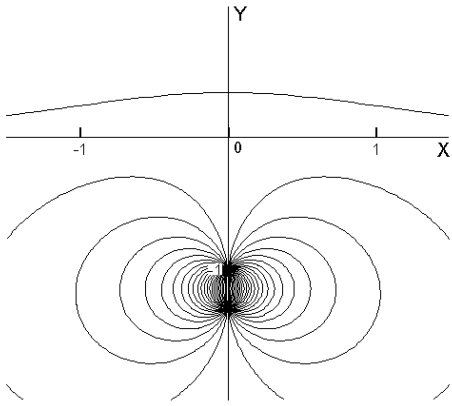


Fig. 3(a) Streamline pattern for $Ca=0.4$ and $h=0.3$.

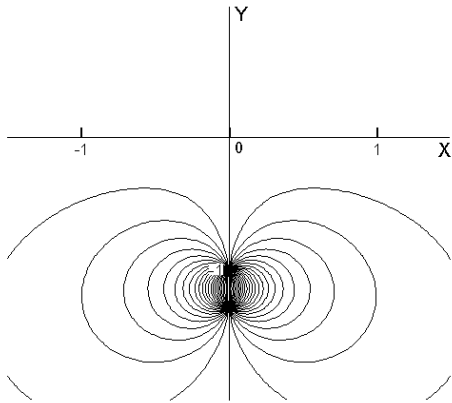


Fig. 3(b) Streamline pattern for $Ca=0$ and $h=0.3$.

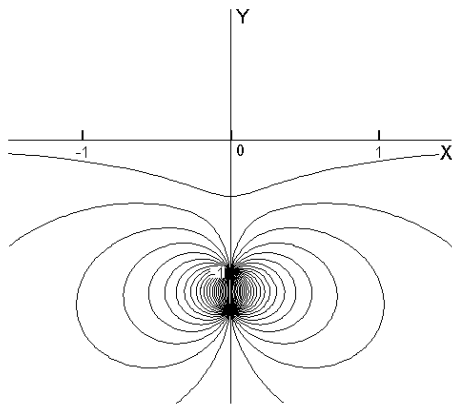


Fig.3(c) Streamline pattern for $Ca=-0.3$ and $h=0.3$.

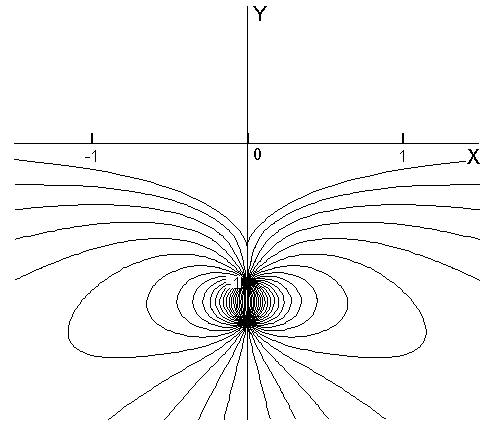


Fig. 3(d) Streamline pattern for $Ca=-0.63$ and $h=0.3$.

참고문헌

- [1] D. D. Joseph, J. Nelson, M. Renardy & Y. Y. Renardy : Two-dimensional cusped interfaces, *J. Fluid Mech.* **223**, 383-409 (1991).
- [2] Y. D. Shikhmurzaev, On cusped interfaces, *J. Fluid Mech.* **359**, 313-328 (1998)
- [3] J. Eggers : Air entrainment through free surface cusps, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4290-4293 (2001)
- [4] J.-T. Jeong & H. K. Moffatt : Free-surface cusps associated with flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **241**, 1-22 (1992).
- [5] J.-T. Jeong : Formation of cusp on the free surface at low Reynolds number flow, *Phys. Fluids*, **11**, 521-526 (1999).
- [6] J.-T. Jeong : Free surface deformation due to a source or a sink in Stokes flow, *Eur. J. Mech. B Fluids*, **26**, 720-728 (2007).
- [7] S. Richardson : Two dimensional bubbles in slow viscous flows, *J. Fluid Mech.* **33**, 476-493 (1968).
- [8] N. I. Muskhelishvili : *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 3rd Edn. (P. Noordhoff 1953).