

무요소법을 이용한 waveguide 내의 필드 분포 해석

Analysis on a Simple Waveguide Using Meshfree Method

이 찬 희, 우 동 균, 정 현 교*
(Chany Lee, Dong-Kyun Woo, and Hyun-Kyo Jung)

Abstract: This paper shows the formulation of fast moving least square reproducing kernel method (FMLSRLM) which is a kind of meshfree methods. FMLSRLM has some advantages compared to conventional numerical techniques such as finite element method. For simple analysis on a rectangular waveguide, point collocation scheme is introduced and applied.

Keywords: fast moving least square reproducing kernel method (FMLSRLM), meshfree, meshless.

I. 서론

여러 공학 분야에서 편미분 방정식을 풀 때, 유한요소법 (finite element method: FEM)과 같은 수치해석적인 방법이 많이 사용되고 있다. 특히 전자파 해석에서는 해석시간이 빠른 시간영역 유한차분법(finite difference time domain: FDTD)이 많이 사용된다.

하지만, 최근 들어, 위에서 언급한 수치해석 기법과 달리 해석 영역을 작은 요소로 나누지 않고, 오직 노드에서의 정보만을 가지고 편미분 방정식을 푸는 방법인 무요소법에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 무요소법에는 여러 종류가 있는데, 대표적으로 element free Galerkin method (EFG) [1], smoothed particle hydrodynamics (SPH) [2], partition of unity finite element method (PUFEM) [3], *h-p* Clouds [4] 등을 예로 들 수 있다. 그 중에서 fast moving least square reproducing kernel method (FMLSRLM)은 근사해 뿐만 아니라 고차 미분까지 동시에 계산할 수 있기 때문에 기존의 무요소법에 비해 속도면에서 큰 장점을 가진다 [5]. 또한 FMLSRLM은 Poisson, stationary incompressible Stokes 문제뿐만 아니라 전자기 문제에도 성공적으로 적용되고 있으며 [5], [6] 축대칭 문제도 다룰 수 있음을 보였다 [7].

이 논문에서는 FMLSRLM을 이용하여 간단한 모델인 사각 waveguide 내부의 필드 분포를 해석하기 위한 point collocation scheme을 소개하고, 적용시킨 결과를 검증해 보도록 한다.

II. FMLSRLM 을 이용한 근사해

FMLSRLM은 n 차원에서 정의된 한 노드 $\bar{\mathbf{x}}$ 의 근방에 위치한 노드 \mathbf{x} 에서의 근사값 $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 를 polynomial basis \mathbf{P}_m 과 그 계수 $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 에 의해 다음과 같이 정의한다 [5], [6]

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{P}_m\left(\frac{\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) \bullet \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (1)$$

여기서 ρ 는 dilation parameter라고 하며 한 노드가 해

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2008. 8. 12., 채택확정 : 200x. x. xx.

정현교 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부

(hkjung@snu.ac.kr)

석 영역 내에서 영향을 미치는 거리를 의미하며, 후에 window function이 정의 될 때 그 의미가 더욱 명확해진다. Exact solution $u(\mathbf{x})$ 와 근사해의 차이를 최소화시키기 위해 moving least square (MLS)의 개념을 도입하면 근사해의 계수를 구할 수 있다. MLS를 적용하면 error residual functional $J(\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}))$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J(\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})) = \sum_{l=1}^{NP} \left| u(\mathbf{x}_l) - \mathbf{P}_m\left(\frac{\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) \bullet \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \right|^2 F_\rho\left(\frac{\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) \quad (2)$$

여기서 NP 는 노드의 개수이고,

$$F_\rho(\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}) = (1/\rho^n) F\left(\frac{\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right), \quad (3)$$

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1 - \|\mathbf{x}\|)^t, & \text{when } \|\mathbf{x}\| < 1, t > 0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

로 정의된다. 여기서 $F(\mathbf{x})$ 는 window function이다. 식 (2)를 최소화시키는 계수 벡터 $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 를 구하기 위해 $J(\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}))$ 를 $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 에 대하여 미분하면, 다음을 만족하며

$$\sum_{l=1}^{NP} \mathbf{P}_m\left(\frac{\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) \left[u(\mathbf{x}_l) - \mathbf{P}_m^T\left(\frac{\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) \bullet \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \right] F_\rho(\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}) = 0, \quad (5)$$

이 식을 $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 에 대하여 정리하면

$$\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) = M^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) \sum_{l=1}^{NP} \mathbf{P}_m\left(\frac{\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) u(\mathbf{x}_l) F_\rho(\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}). \quad (6)$$

이 된다. 여기서 moment 행렬 $M(\bar{\mathbf{x}})$ 는

$$M(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{l=1}^{NP} \mathbf{P}_m\left(\frac{\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) \mathbf{P}_m^T\left(\frac{\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) F_\rho(\mathbf{x}_l - \bar{\mathbf{x}}) \quad (7)$$

과 같이 정의된다. 만약 2차원 문제이고 polynomial basis를 2차식으로 한다면 $\mathbf{P}_m(\mathbf{x})$ 는 $[1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]^T$ 이

되므로 moment 행렬은 6-by-6이 된다. 식 (5)에서와 같이 한 노드에 대해서 moment 행렬의 역행렬을 계속 구해야 하므로, FMLSРKM은 계산 시간의 측면에서 FEM과 비교해보았을 때 불리하다고 할 수 있다.

식 (1), (6)로부터 근사해를 다음과 같이 새로이 정의할 수 있다.

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{P}_m^T \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) M^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) \times \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) F_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) u(\mathbf{x}_I). \quad (8)$$

FMLSРKM은 point collocation법이나 Galerkin법, 둘 다 적용할 수 있으나 collocation법이 좀 더 효율적인 계산이 가능하다고 한다 [5]. 하지만 collocation법을 적용시키기 위해서는 높은 차수의 미분값을 필요로 한다. 기존의 무요소법에서는 근사해를 구하고 그 근사해로부터 새로이 미분값을 계산해서 사용하였지만, FMLSРK 법은 근사해 뿐만 아니라 그 미분값까지 한번에 계산해낼 수 있기 때문에 더 효율적인 계산이 가능하게 되었다. 이 방법에 “fast”라는 단어가 붙은 이유이기도 하다.

근사해의 α 번째 미분은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D^\alpha u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \left[D^\alpha \mathbf{P}_m^T \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \right] M^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) \times \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) F_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) u(\mathbf{x}_I), \quad (9)$$

여기서 α 는 n 차원에서 정의되는 벡터이며, D^α 는 미분 연산자로서 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (10)$$

$$D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \quad (11)$$

예를 들어 2 차원에서 $D^{(2,0)}$, $D^{(0,1)}$ 은 각각 $\partial^2 / \partial x^2$, $\partial^2 / \partial x \partial y$ 를 나타낸다. $\bar{\mathbf{x}}$ 를 \mathbf{x} 로 수렴시킴으로써 \mathbf{x} 에서 정의되는 전역 근사해의 α 번째 미분, 즉 $D^\alpha u(\mathbf{x})$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} D^\alpha u(\mathbf{x}) &= \lim_{\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} D^\alpha U^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}} \mathbf{e}_\alpha^T M^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) F_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) u(\mathbf{x}_I) \quad (10) \\ &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I^{[\alpha]} u(\mathbf{x}_I) \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{e}_\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ 는 α 번째 단위 벡터이고 $\Psi_I^{[\alpha]}$ 는 I 번째 노드에서 정의되는 α 번째 형상함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$\Psi_I^{[\alpha]} = \frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}} \mathbf{e}_\alpha^T M^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_m \left(\frac{\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) F_\rho(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}). \quad (11)$$

III. Waveguide 내부의 필드 해석

FMLSРKM으로 waveguide 내부의 필드 해석이 가능한지 검증하기 위해 그림 1과 같이 사각 waveguide를 테스트 모델로 정하였다. TM 모드일 때, $H_z = 0$ 이 되고, E_z 는 다음 식을 만족한다 [8].

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2 \right) E_z^0(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ E_z^0(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) \quad \text{on } \partial\Omega_D \\ \frac{\partial E_z^0(\mathbf{x})}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega_N \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $\mathbf{x} = [x \ y]^T$, Ω , $\partial\Omega_D$, $\partial\Omega_N$ 는 각각 해석영역, 고정경계조건의 경계, 자연경계조건의 경계를 나타낸다. $E_z^0(\mathbf{x})$ 의 근사해를 $E^h(\mathbf{x})$ 라 한다면 식 (12)를 풀기 위한 point collocation 식은 다음과 같다.

$$E^h(\mathbf{x}) = \sum_{x_j \in \Lambda} E_j \Psi_j^{[(0,0)]}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

$$\sum_{x_j \in \Lambda} E_j (\Psi_j^{[(2,0)]}(x_j) + \Psi_j^{[(0,2)]}(x_j) + h^2 \Psi_j^{[(0,0)]}(x_j)) = 0 \quad \text{for all } \mathbf{x}_I \in \Lambda_d \quad (14)$$

$$E_I = g(x_I) \quad (15)$$

$$\sum_{x_j \in \Lambda} E_j (\Psi_j^{[(1,0)]}(x_I), \Psi_j^{[(0,1)]}(x_I)) \bullet \mathbf{n}(x_I) = 0 \quad \text{for all } x_I \in \Lambda_n \quad (16)$$

여기서 $\Lambda = \Lambda_i \cup \Lambda_d \cup \Lambda_n$, 이고 Λ_i , Λ_d , Λ_n 는 각각 해석 영역의 내부에 위치한 노드와 고정경계조건을 가지는 노드, 자연경계조건을 가지는 노드의 집합이고, $\mathbf{n}(x_I)$ 는 노드 x_I 에서 정의되는 접선방향의 단위 벡터이다. 경계에서 E_z 가 0의 값을 가진다고 하면, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ 평면에서의 E_z 는

$$E_z^0(\mathbf{x}) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (17)$$

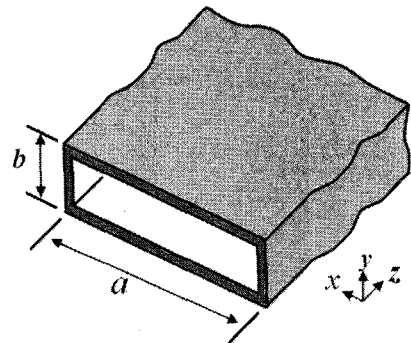


그림 1. 사각 waveguide.
Fig. 1. A rectangular waveguide.

이 된다. 그림 2는 각 모드에서 E_z 의 분포를 FMLSРKM을 이용하여 구한 결과이다. 해석해인 식 (17)과 비교해볼 때 FMLSРKM은 상당히 정확한 해를 찾았다고 볼 수 있다.

IV. 결론

이 논문에서는 요소생성과정이 필요 없이 노드 정보만 가지고 편미분 방정식을 풀 수 있는 무요소법의 하나인 FMLSРKM을 소개하였고 그 정칙과 과정을 살펴보았다. FMLSРKM은 다른 무요소법들의 장점을 그대로 취하면서 근사해와 그 미분까지도 한번에 계산해낼 수 있다는 특징이 있어 널리 사용될 것으로 기대되고 있는 방법이며, 본 논문에서는 간단한 모델에 대해 그 해석 결과를 검증함으로써 waveguide 해석에 대한 FMLSРKM의 가능성을 검증하였다.

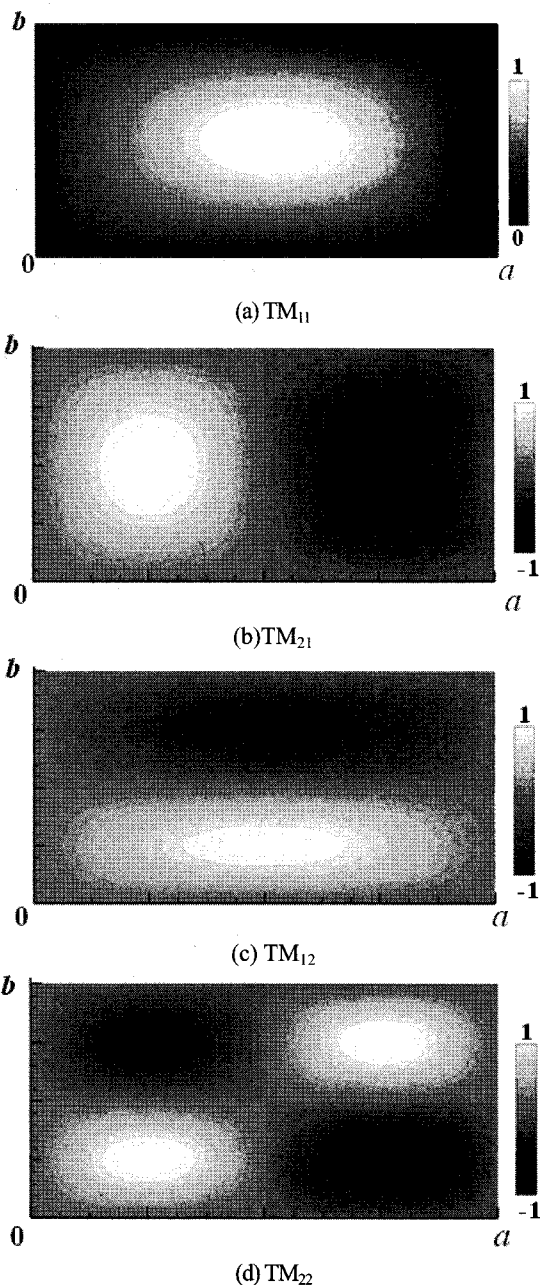
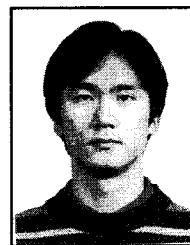


그림 2. 모드에 따른 사각 waveguide에서 E_z 의 분포.
Fig. 2. Distributions of E_z in the rectangular waveguide.

참고문헌

- [1] Y. Y. Lu, T. Belytschko, and L. Gu, "A new implementation of the element free Galerkin method," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 113: 397-414, 1994.
- [2] R. A. Gingold and J. J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars," *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- [3] J. M. Melenk and I. Babuška, "The partition of unity finite element method: basic theory and applications," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 139, pp. 289-314, 1996.
- [4] C. A. Duarte and J. T. Oden, "An h-p adaptive method using clouds," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 139, pp. 237-262, 1996.
- [5] D. W. Kim, and Y. Kim, "Point collocation methods using the fast moving least square reproducing kernel approximation," *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, vol. 56, pp.1445-1464, 2003.
- [6] D. W. Kim, and H. K. Kim, "Point collocation method based on the FMLSРKM approximation for electromagnetic field analysis," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 1029-1032, 2004.
- [7] C. Lee, D. W. Kim, S. H. Park, H. K. Kim, C. H. Im, H. K. Jung, "Point collocation meshfree method using FMLSРKM for solving axisymmetric Laplace Equation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 6, pp. 1234-1237, 2008.
- [8] David K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, 2nd Ed., Addison Wesley, 1989.



이 찬 희

2003년 서울대학교 전기공학부(공학사).
2006년 서울대학교 전기공학부(박사수료).
2006년~현재 기초전력연구원. 관심 분야는 수치해석.



우 동 군

2007년 연세대학교 전기전자공학부(공학사).
2007년~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 석사과정 재학중. 관심분야는 전기 기기, 수치해석.



정 현 교

1979년 서울대학교 전기공학과(공학사).
1981년 서울대학교 전기공학과(공학석사).
1984년 서울대학교 전기공학과(공학박사).
1994~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 교수.